EL PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

ARQUÍMEDES

¡Eureka! El placer de la invención



NATIONAL GEOGRAPHIC

ARQUÍMEDES DE SIRACUSA vivió en tiempos de guerra, por lo que no debe extrañarnos que empleara parte de su genio en diseñar ingeniosas máquinas para la defensa de su ciudad natal. El siracusano destacó en esta actividad como lo hizo en todas aquellas por las que tuvo a bien interesarse: las matemáticas, la física, la ingeniería, la astronomía... Calculó el área definida por una curva parabólica con un método que puede considerarse el antecedente del cálculo infinitesimal; estableció los principios físicos que subyacen a palancas y poleas, e incluso se atrevió a estimar el número de granos de arena que podía contener el universo, una cifra de tal magnitud que tuvo que inventar una forma nueva de escribirla. Pero el hallazgo que le ha valido fama inmortal es la del principio de la hidrostática que lleva su nombre, sin duda uno de los más bellos experimentos de la historia y justo merecedor de la exclamación de júbilo que desde entonces simboliza el quehacer científico: «¡Eureka!»

EL PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

ARQUÍMEDES

¡Eureka! El placer de la invención

NATIONAL GEOGRAPHIC

A mi hermana Geni, porque siempre está ahí, para todos, sin pedir nada a cambio, con sus heliostatos y eurekas.

EUGENIO MANUEL FERNÁNDEZ AGUILAR es Licenciado en Física y profesor de ciencias en secundaria. Ha publicado varios libros de texto y divulgación científica. Divulga la ciencia de manera activa mediante blogs, artículos en papel, conferencias y programas de radio.

Realización: EDITEC

Diseño cubierta: Llorenç Martí

Diseño interior: Luz de la Mora

Infografías: Joan Pejoan

Fotografías: Anarkman/Wikimedia Commons: 111c, 111b; Archivo RBA: 27ai, 66, 135bi; AugPi/Wikimedia Commons: 111a; Bibliotecas de la Universidad de Columbia: 115ad; Bibliotecas de la Universidad de Pennsylvania: 45b; Codas2/Wikimedia Commons: 115ai; Galería de los Ufizzi, Florencia: 135bd; Harper's New Monthly Magazine nº 2229, June 1869: 135a; Instituto Courant de Ciencias Matemáticas, Universidad de Nueva York: 123, 127; Barb Junkkarinen: 53; Knight's American Mechanical Dictionary (1876): 122; Marsyas/Museo del Ágora de Atenas: 50; Pete/Wikimedia Commons: 59; Thomas Schoch: 115b; F.G.O. Stuart: 125; Edouard Vimont/Proyecto Gutenberg: 27b; Marcus Vitruvius Pollio & Walter Hermann Ryff/Deutsche Fotothek: 45a; The Walters Art Museum, Baltimore: 27ad.

ISBN: 978-84-473-7635-3
Depósito legal: B-6256-2016

Impreso y encuadernado en Rodesa, Villatuerta (Navarra)

Impreso en España - *Printed in Spain*

Sumario

Introducción

Cada cuatro años, la Unión Matemática Internacional otorga la medalla Fields a uno o más matemáticos (hasta un máximo de seis) que han destacado por alguna razón en su campo de estudio. Se trata de la más alta distinción que un matemático pueda recibir, habida cuenta de la ausencia del premio Nobel en dicha disciplina. En una de las caras de la medalla puede leerse una frase derivada de un verso del poeta romano Marco Manilio, que rodea el grabado de un busto de Arquímedes: «*Transire suum pectus mundoque potiri*» («Ir más allá de uno mismo y dominar el mundo»).

Matemático, físico, ingeniero y astrónomo; estas son las primeras palabras que suelen leerse en muchos textos que presentan a Arquímedes de Siracusa, un hombre que entregó su vida a la ciencia y que dejó en ella una huella indeleble que dura ya más de dos mil años. Conocer la figura de Arquímedes es viajar por su extensa obra científica, puesto que tenemos la suerte de que nos han llegado muchos de sus tratados, aunque no se pueda decir lo mismo acerca de los pormenores de su propia vida. Lo que ha persistido hasta hoy es una multitud de ensayos sobre matemáticas con grandes descubrimientos geométricos y, entre ellos, por ejemplo, una excelente aproximación al número π. Prácticamente la totalidad de sus textos están dedicados a las matemáticas, y por esta razón, entre todos los apelativos, se le suele recordar como matemático por encima de otras denominaciones. Fue casi con-

temporáneo de Euclides, el gran sabio que recogió muchos teoremas en el inmortal *Elementos*. Los tratados de Arquímedes presentan un rigor exquisito, una seriedad que no sería igualada durante siglos y una estructura que hace amena y ordenada la lectura. Incluso podemos atrevernos a afirmar que es un texto moderno desde el punto de vista académico. Trabajó con círculos, cuadrados, parábolas, paraboloides y un sinfín de otras figuras geométricas. Pero no solo estudió lo que ya era conocido en su época, sino que introdujo figuras nuevas en el panorama de las matemáticas, como la espiral y los sólidos que llevan su nombre. A pesar de que sus contribuciones más conocidas en matemáticas son las cuestiones geométricas, para el público general pasa desapercibido un hecho contrastado y real: fue uno de los precursores más tempranos del cálculo infinitesimal. Dado que para el estudio de áreas y volúmenes complejos necesitaba una herramienta matemática nueva, usó un método en el que cuarteaba las superficies y los volúmenes, significando un primer paso hacia el cálculo integral. Por desgracia, sus ideas al respecto fueron desoídas por la comunidad científica debido a su complejidad y hasta la era moderna no se ha reconocido su gran aportación. Sin embargo, los apuntes que hizo Arquímedes sobre esta cuestión bien podrían formar parte de un curso matemático introductorio de nivel universitario hoy en día.

La figura de Arquímedes tal vez sea más conocida a nivel popular por su papel en los campos de la física y la ingeniería, gracias al principio de Arquímedes y a la ley de la palanca. Estos dos resultados están grabados en el recuerdo de todos, quizá porque al bañarnos cualquiera de nosotros ha experimentado alguna vez la sensación de la disminución del peso, o el rebosamiento de agua. De igual modo, ¿quién no ha abierto alguna vez una botella haciendo palanca en la tapa con un cuchillo o unas tijeras? El hecho de que estos dos conceptos estén más cercanos a nuestra realidad cotidiana hace que sean populares de por sí y que nuestro cerebro sepa retenerlos con mayor facilidad. Una gran parte de las matemáticas y la física de Arquímedes podrían etiquetarse de cotidianas, respecto al conjunto de fenómenos que analizan. En la historia de la ciencia ha ocurrido en ocasiones que los científicos

han estudiado en primer lugar los hechos más cercanos a su propio quehacer, dejando cuestiones más elevadas para épocas más tardías. Así, un análisis histórico nos enseña que los primeros científicos procuraron explicar el porqué y el cómo de los fenómenos naturales más cotidianos y, de paso, sentaron las bases para la ciencia actual. Arquímedes es uno de los primeros eslabones de esta cadena.

Arquímedes fue una persona bien relacionada, tanto política como científicamente. Existe constancia escrita por el mismo Arquímedes de que tuvo relación con el griego Eratóstenes de Cirene, recordado en los libros de historia de la ciencia como la primera persona que midió el radio de la Tierra (lo cual haría, además, con bastante precisión). Arquímedes mantuvo tanto con él como con otros científicos del momento una correspondencia frenética. Los propios tratados, tal como se han conservado, suelen mostrar un preámbulo con la carta que los precede, haciendo las veces de introducción de la propia obra. También es conocida la estrecha relación que mantuvo con Hierón II, tirano de Siracusa y pariente suyo. Incitado por él construyó todo tipo de ingenios, muchos de ellos de uso militar. Gracias a estas relaciones se conoce algo de su biografía, a través de lo que contaba en sus cartas. Por ejemplo, por palabras del propio Arquímedes hoy sabemos que su padre, Fidias, fue astrónomo, algo que posiblemente influyó en su educación.

La época que le tocó vivir al sabio de Siracusa fue un momento marcado por los cambios políticos, puesto que su vida discurrió en mitad de las guerras púnicas. Siracusa era una ciudad pequeña; sin embargo, ocupó un lugar destacado en las disputas entre romanos y cartagineses cuando corrían los años de las citadas guerras púnicas. La época que vivió le marcó en las propias investigaciones científicas y técnicas que llevó a cabo. Tanto es así que el relato de la defensa de Siracusa no puede contarse sin el papel decisivo que desempeñó Arquímedes. De hecho, en ese punto es donde se suele presentar a Arquímedes como el gran ingeniero que diseñó por completo la defensa de una ciudad, la cual, gracias a sus geniales ideas, soportó durante más de dos años el asedio romano.

En el presente libro comenzaremos esbozando ligeramente la biografía de Arquímedes, aunque por desgracia contiene pocos datos, contextualizando su vida en el entorno social e histórico que ya se ha adelantado. Nos detendremos a analizar algunas de las muy fiables fuentes que hablan de instantes concretos de su vida, para poder acercarnos al matemático de la mejor forma posible. En el primer capítulo presentaremos la lista de tratados que salieron de su mano, y tendremos la oportunidad de poner la mirada en los verdaderamente relevantes. Muchos de esos tratados son de fácil lectura para cualquier persona familiarizada con los textos matemáticos y, en especial, con la geometría.

En el segundo capítulo abordaremos los temas relacionados con la física. En primer lugar se estudiará el famoso principio de Arquímedes, también llamado *principio de la hidrostática*, y nos acercaremos a los conocidos relatos de la corona del rey Hierón y el «¡eureka!» pronunciado por el sabio después del baño más famoso de la historia de la ciencia. En segundo lugar, no puede faltar la ley de la palanca, que ofrece la oportunidad de aproximarnos al tratamiento matemático al respecto que el propio Arquímedes realizó sobre ella. Por último, también en el segundo capítulo se abordará cierto estudio de las dimensiones del universo en el que incluso se explica un método sorprendente para expresar números grandes y en el que se encuentra la única referencia al padre del genio; ese método se considera un antecedente de la actual notación científica.

El tercer capítulo está dedicado a los principales logros matemáticos del sabio de Siracusa, y en él se establecen algunas cadenas de razonamientos matemáticos, de fácil seguimiento, encaminados a divulgar los resultados del propio Arquímedes en el lenguaje actual. El capítulo constituye un sorprendente viaje a la génesis del cálculo diferencial, cuyo recorrido comienza con el análisis de los métodos usados por Arquímedes, uno de los cuales es una invención propia basada en la ley de la palanca. Presentaremos varios apartados relacionados con aspectos geométricos (circunferencias, parábolas, espirales, etc.), otros dedicados a mostrar cómo Arquímedes acarició la idea de límite, e incluso no faltarán curiosidades matemáticas, entre las que podremos abordar *El problema*

de los bueyes, un libro escrito en forma de poema que plantea el recuento de reses de distintos tipos. Otras figuras geométricas particulares son las conocidas como cuchillo de zapatero y bodega para la sal, de las que estudiaremos sus propiedades.

En el cuarto y último capítulo se discuten algunos artificios atribuidos a su ingenio. Para favorecer una lectura amena, estos ingenios no serán abordados desde el punto de vista técnico, sino que se estudiará su utilidad y cómo sabemos hoy si son o no autoría de nuestro personaje. Se hablará del tornillo de Arquímedes, de un barco gigante llamado *Siracusia*, de espejos incendiarios, de catapultas...

A lo largo de la presente obra se dan informaciones complementarias que pueden ser de gran interés para el lector, tanto del contexto histórico como de otros autores o aplicaciones de los resultados científicos expuestos en estas páginas. La biografía científica de Arquímedes puede ser de gran utilidad a cualquiera por varios motivos. Por un lado, sus aportaciones están presentes en nuestra vida diaria en multitud de momentos, por ejemplo, en los baños veraniegos, al abrir una puerta o al dibujar una circunferencia. Por otro lado, los profesores y docentes pueden encontrar en las palabras de Arquímedes posibilidades didácticas de todo tipo y en todos los campos de las matemáticas y la física. Los estudiantes, por su parte, pueden leer esta obra con el afán de asentar algunos de sus conocimientos, e incluso los investigadores avanzados pueden acceder a un punto de vista del que tal vez nunca hayan disfrutado, dada la premura en sus estudios de licenciatura y de doctorado.

La impronta que dejó Arquímedes en la historia se deja ver en el hecho de que forma parte del elenco de personajes que cualquier persona con una cultura media es capaz de recitar de memoria. Incluso si hiciéramos una lista de sabios dedicados a la ciencia estaría en la lista de los que se pueden contar con una mano y nos sobraría un dedo: Arquímedes, Galileo, Newton y Einstein. Por supuesto que hay más físicos que han hecho historia, pero ya sea por sus méritos o por los caprichos del destino son estos cuatro, tal vez, los que forman parte del recetario de la sabiduría popular.

Aunque el nombre de Arquímedes está sujeto a mitos y leyendas, vamos a comprobar que sus éxitos reales fueron mucho mayores que las historias fabuladas que se cuentan sobre él. Es necesario recordar a Arquímedes como el hombre que gritaba «¡Eureka!, ¡eureka!» o como el científico que dijo «Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo», pero su genialidad fue mucho más allá del hecho de pronunciar un par de frases famosas. En el caso de Arquímedes, la realidad supera la ficción.

287 a.C. Fecha aproximada del nacimiento de Arquímedes, en Siracusa, Sicilia. Su padre era astrónomo y pariente de Hierón II, rey de Siracusa desde el año 265 hasta el 216 a.C.

279 a.C. Fin del reino de Hicetas, tirano de Siracusa.

278 a.C. Tras la victoria en la batalla de Asculum (279 a.C.), el rey Pirro de Epiro pacta una tregua con Roma.

270 a.C. Nacimiento de Gelón, hijo de Hierón II de Siracusa, a quien Arquímedes dedicó su tratado *El Arenario*, en el que se plantea cuántos granos de arena cabrían en Siracusa, en Sicilia, en la Tierra...

268 a.C. Nace Marco Claudio Marcelo, uno de los comandantes del ejército romano durante la Segunda Guerra Púnica.

265 a.C. Hierón derrota a los mamertinos y se proclama rey de Siracusa.

264 a.C. Comienzo de la Primera Guerra Púnica. Siracusa se alía con Cartago contra Roma.

263 a.C. Hierón firma el tratado de paz con Roma.

260 a.C. Arquímedes formula la ley de la palanca de brazos desiguales, siendo el primer matemático que pudo adaptar la geometría de su momento a fenómenos físicos.

247 a.C. Nacimiento del general cartaginés Aníbal Barca.

241 a.C. Fin de la Primera Guerra Púnica.

240 a.C. Eratóstenes elabora un mapa que representa el mundo conocido. Comienza la corregencia de Hierón y Gelón.

230 a.C. Primeros estudios sobre las cónicas, de la mano del geómetra griego Apolonio de Perga.

218 a.C. Comienza la Segunda Guerra Púnica entre Roma y Cartago. Tras cruzar los Alpes, Aníbal invade Italia.

216 a.C. Muere Gelón.

215 a.C. Muere Hierón. Jerónimo, hijo de Gelón, asume la corona de Siracusa.

213 a.C. Ataque de Marcelo a Siracusa y derrota con la ayuda de las máquinas de Arquímedes. Comienza el asedio a Siracusa.

212 a.C. Siracusa es tomada y saqueada por los romanos. Arquímedes muere durante el saqueo.

80 a.C. Cicerón descubre la tumba de Arquímedes en Siracusa.

CAPÍTULO 1

Un sabio en la Antigüedad

El siglo III a.C. constituye la denominada Edad de Oro de las matemáticas griegas. El nacimiento de Arquímedes se sitúa en ese siglo, entre los de los matemáticos Euclides de Megara y Apolonio de Pérgamo. La vida de Arquímedes discurrió relativamente tranquila teniendo en cuenta que fue contemporáneo de las guerras púnicas. Dedicó su vida al estudio de las matemáticas y a su aplicación a los campos de la física y está considerado como el primer físico matemático de la historia.

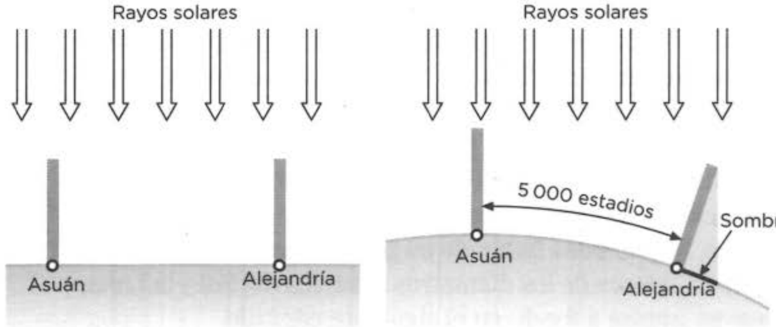
No nos ha llegado demasiada información acerca de la vida de Arquímedes, un hombre que destacó en matemáticas, física, astronomía, ingeniería e, incluso, tuvo un papel importante y decisivo en cuestiones militares y políticas. Lo que sabemos hoy sobre su vida nos viene desde varias fuentes: escritos de historiadores romanos y griegos, anécdotas contadas por otros eruditos y las propias epístolas y obras de Arquímedes. El matemático griego Eutocio de Ascalón (480-540) hace referencia a una biografía escrita por Heráclides, amigo de Arquímedes, que por el momento parece ser que está perdida. Un único testimonio nos sitúa su nacimiento en torno al año 287 a.C., en la ciudad siciliana de Siracusa, mientras que su muerte, acaecida en 212 a.C., bajo el filo del arma de un soldado romano, bien podría parecer el capítulo final de una novela de aventuras científicas. Es muy posible que redundara en su educación científica el hecho de que Fidias, su padre, fuera astrónomo, y motivara su interés por las cuestiones matemáticas y astronómicas. El mismo Arquímedes habla de su progenitor en *El Arenario* cuando delibera acerca de los diámetros relativos del Sol y la Luna, aspecto que se tratará a fondo en el siguiente capítulo.

Aunque pasó casi toda su vida en Siracusa, Arquímedes viajó a Egipto en su juventud, en concreto a la ciudad de Alejandría, tal como cuenta Diodoro Sículo, un historiador siciliano del siglo I a.C. En cualquier caso, sea o no fiable el dato, es cierto que Arquí-

medes estuvo en contacto con eruditos y estudiosos alejandrinos. Cuenta de ello da su actividad epistolar, aunque se tenga solo constancia parcial de ella. Los investigadores han supuesto, por tanto, que Arquímedes se formó en matemáticas con algunos seguidores del matemático griego Euclides (325-265 a.C.), hecho que marcaría de forma decisiva su labor científica, dejando un sello de

MIDIENDO LA TIERRA CON LA SOMBRA DE UN OBJETO

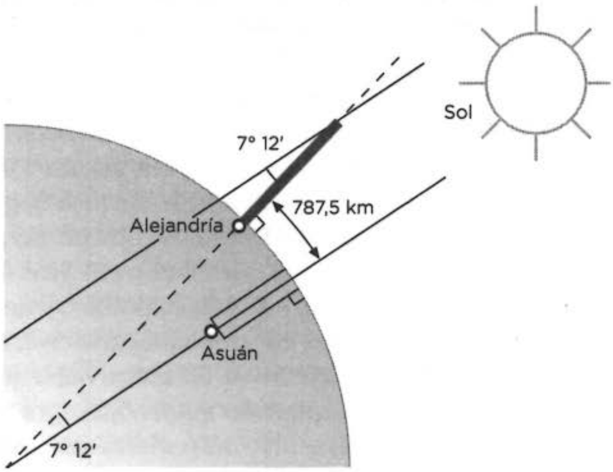
Eratóstenes de Cirene consiguió medir el diámetro de la Tierra con un error de poco más del 1,5%, lo cual es posible que hoy no sorprenda demasiado, a no ser que se tenga en cuenta el dato de que lo hizo en el siglo III a.C. Tenía noticias de que en la ciudad de Siena (actual Asuán, en Egipto, no confundir con la Siena italiana) el día del solsticio de verano los objetos no proyectaban sombra y que el fondo de los pozos se iluminaba. Este hecho le condujo a una idea extraordinaria, por su simplicidad y elegancia: si medía la sombra de un objeto en una ciudad que estuviese situada en la misma longitud terrestre (en el mismo meridiano) que Siena, podría determinar el ángulo de separación de ambas ciudades por la circunferencia de la Tierra y extrapolar así el resultado (véase la figura). Así que, en su posición de director de la Biblioteca de Alejandría, consiguió que un grupo de esclavos de las caravanas (a cuyos jefes Eratóstenes les regalaba mapas para que se orientaran) midiera la separación entre las ciudades de Alejandría y la actual Asuán. Resultó ser de 5000 estadios.



Si la Tierra fuera plana, en el momento del solsticio de verano ninguno de los objetos en las ciudades arrojarían sombra, como puede verse en las ilustraciones.

estilo en casi todas sus obras. Uno de los receptores de sus cartas y sus escritos fue Eratóstenes de Cirene (276-194 a.C.), director de la Biblioteca de Alejandría desde el 236 a.C. hasta el final de sus días. Arquímedes debía tenerlo en muy alta estima para intercambiar con él sus preciadas ideas científicas en un intento de perpetuar sus descubrimientos. Y así era, pues Eratóstenes gozaba de

Tras medir la sombra Eratóstenes encontró que ambas ciudades estaban separadas en una proporción de la cincuentava parte de la circunferencia de la Tierra, es decir, un ángulo de 7° 12' (véase la figura). Este dato nos da un valor de 50 x 5 000 = 250 000 estadios para la circunferencia completa. Muchas son las interpretaciones sobre cuál es la verdadera equivalencia entre el estadio de Eratóstenes y el metro actual, pero tomemos como válida la métrica egipcia, la cual deriva en que 1 estadio equivale a 157,2 m. Por tanto, la longitud de la circunferencia de la Tierra calculada por Eratóstenes es de 39 300 km, lo cual supone un radio medio de 6 256 km, frente a los 6 371 km medidos en la actualidad; una aproximación verdaderamente sorprendente.



En este esquema se aprecia que el ángulo medido sobre el objeto que proyecta la sombra es el mismo que el ángulo de separación de las dos ciudades sobre la circunferencia terrestre. Este ángulo es la cincuentava parte de 360°.

gran renombre y prestigio como matemático, incluso más allá de Alejandría. De hecho, se considera que fue el primero que consiguió medir el diámetro de la Tierra, con un margen de error sorprendentemente pequeño para la época. Arquímedes remitió a Eratóstenes *El Método*, una obra donde explicaba su método de trabajo y que estuvo perdida hasta 1906, cuando el historiador helenista Johan Ludvig Heiberg descubrió el palimpsesto de Constantinopla. Durante años, muchos estudiosos pensaron que guardaba en secreto y con recelo sus herramientas metodológicas, pero el hallazgo de la obra cambió para siempre la visión que se tenía de Arquímedes. Conón de Samos (280-220 a.C.) fue otro de sus corresponsales alejandrinos, al igual que Dositeo de Pelusio (2.ª mitad del siglo II a.C.). Del primero llegó a decir que era un «amigo y hombre que ha llegado a ser admirable en matemáticas». A la muerte de Conón decidió enviarle algunas de sus obras a Dositeo, puesto que este había conocido a Conón y estaba familiarizado con el estudio de la geometría. No nos han llegado las cartas enviadas a Conón, pero sí sabemos que a Dositeo le remitió dos libros de *Sobre la esfera y el cilindro*, y los tratados completos *Sobre los conoides y los esferoides*, *Sobre las espirales* y *Sobre la cuadratura de la parábola*.

Arquímedes guardó una relación muy estrecha con Hierón II (306-215 a.C.), tirano de Siracusa entre los años 270 a.C. y 215 a.C. Al parecer, ambos eran parientes, pues tal vez Fidias, padre de Arquímedes, fuese primo de Hierón II. Incluso llegó a dedicar *El Arenario* a Gelón II, hijo del tirano. Son varias las fuentes donde se relatan historias acaecidas que involucran a los dos personajes y todas ellas suelen destacar el vínculo político y de alianza bélica entre Hierón y Arquímedes que desembocaría en la dirección de la defensa ante el famoso asedio de Siracusa, habiendo ya fallecido Hierón. El tirano había quedado maravillado por una demostración intelectual y mecánica de su pariente: consiguió mover un gran barco pesado realizando un pequeño esfuerzo. Esta historia es comúnmente recordada con la sentencia «Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo», recogida por Papo de Alejandría (290-350), y que sirve para traernos a la memoria las leyes de la palanca, punto que será abordado en los siguientes capítulos. Tal fue

la sorpresa de Hierón que «encargó a Arquímedes que le construyese toda especie de máquinas de sitio, bien fuera para defenderse o bien para atacar», como afirma el historiador griego Plutarco (ca. 50-ca. 120) en su *Vida de Marcelo*.

> «Marcelo, lleno de admiración por ese genio extraordinario, dio orden de conservarle la vida, siendo para él de tanta gloria la conservación de Arquímedes como la toma de Siracusa.»
>
> — Publio Valerio Máximo.

Es interesante detenernos brevemente en el relato del mencionado asedio a Siracusa, por el papel que tuvo Arquímedes. A pesar de que ambos bandos estaban muy debilitados tras anteriores enfrentamientos, Roma decidió declarar la guerra a Cartago a partir de la destrucción que había sufrido Sagunto por parte de los cartagineses. Se sucedieron entonces un conjunto de batallas que constituirían la Segunda Guerra Púnica, contienda que comenzó en 218 a.C. y duraría hasta 201 a.C. El general cartaginés Aníbal Barca (247-183 a.C.) había comenzado a progresar de forma preocupante por Italia cuando el cónsul romano Marco Claudio Marcelo (268-208 a.C.) fue enviado a Sicilia con una armada, para tomarla al precio que fuese. Allí se encontraba la ciudad estado de Siracusa, que por entonces era una polis griega.

Marcelo, como nos cuenta Plutarco, «era realmente guerrero en el ejercicio y los conocimientos» y «para él no hubo desafío que no aceptase». Sin embargo, se vio obligado a sitiar Siracusa durante meses, pues tomarla a viva fuerza le resultó imposible. Marcelo y sus soldados no contaban con la mente del mayor matemático griego de la época y uno de los más grandes sabios de la Antigüedad: Arquímedes. Así que el comandante romano estuvo cinco días dedicado a preparar el asedio a Siracusa, reuniendo y disponiendo todo tipo de armas y artilugios. La ciudad estaba elevada, rodeada de muros en redondo, a modo de contorno, y de barbacanas, es decir, era una verdadera fortificación de difícil acceso. Mientras él mismo realizaba un ataque desde el mar, su

adjunto Apio dirigía el ataque en tierra por Levante. La flota de Marcelo contaba con sesenta quinquerremes (barcos de guerra dotados con cinco niveles de remos) repletos de soldados armados de arcos, flechas y hondas para amilanar la defensa siracusana desde las almenas. Ocho de los quinquerremes estaban unidos de dos en dos, eliminando las filas de remos por donde se fusionaban, para desplegar las sambucas, así llamadas porque recordaban al homónimo instrumento musical; se trataba de unas máquinas de asedio recientemente diseñadas por Heráclides de Tarento (no confundir con el biógrafo de Arquímedes) y que resultaron ser un estrepitoso fracaso. En lo alto de la escalera se situaban tablas por tres lados con cuatro hombres para desalojar las almenas.

«Había más imaginación en la cabeza de Arquímedes que en la de Homero.»

— Voltaire.

Como se ha indicado, Marcelo estaba acostumbrado a las armas y era hombre de conocimiento en el terreno de combate; sin embargo, Arquímedes había prevenido la ofensiva con todo tipo de ingenios que frustrarían cualquier intento de acometida. Tenía preparadas máquinas, tanto defensivas como ofensivas, algunas de las cuales lanzaban dardos a todas las distancias; dispuso ballestas y catapultas más elásticas que las del enemigo, máquinas que arrojaban proyectiles pesados a distancias inimaginables para los romanos, con gran violencia y velocidad. Los muros servían de escondite a toda esta maquinaria, extraña para las sorprendidas huestes de Marcelo y Apio. Las sambucas de los quinquerremes de Marcelo eran como papel para los grandes peñascos y pedazos de plomo disparados mediante los novedosos artefactos diseñados a tal efecto. Los navíos eran levantados y soltados desde las alturas, hundidos o estrellados contra las volanderas, atrapados «dejando caer una mano de hierro atada a una cadena». Los soldados se encontraban realmente horrorizados, puesto que nunca habían visto instrumentos similares a los que Arquímedes había diseñado, los cuales aparecían desde lo alto sin previo aviso y rompían filas

sembrando el pánico entre los combatientes. Durante los meses que duró el asedio, ninguna estratagema violenta vio los frutos deseados. Marcelo y sus hombres estaban desesperados, no sabían cómo actuar ni a qué atenerse. El bloqueo del suministro de víveres para conseguir vencerlos por el hambre fue uno de los tantos movimientos inútiles que los romanos realizarían durante el asedio. Como diría el griego Polibio de Megalópolis (200-118 a.C.) en su *Historia Universal bajo la República Romana*, «no contaban con la habilidad de Arquímedes, ni preveían que en ocasiones un buen ingenio puede más que muchas manos», a partir de lo cual «jamás osaron intentar un asedio a viva fuerza», pues «tanto y tan admirable es el poder que tiene en ciertos lances un solo hombre y un solo arte empleado a propósito». La toma de la ciudad por la fuerza se hacía imposible, solamente el sitio sería la alternativa. La forma exacta en la que los soldados romanos accedieron a Siracusa no está del todo aclarada, y en este sentido Plutarco relata que pudieron haber entrado haciendo uso de la oportuna penumbra de la noche, de manera oculta, por una torre mal conservada y mal defendida, tal vez ayudados de algún traidor siracusano. Aprovecharon un momento de fiesta en honor a Artemisa, mientras la diversión y el vino servían para bajar la guardia. Cuando en Siracusa advirtieron el problema, decenas de soldados romanos ya habían tomado sus calles. Corría el año 212 a.C.

Situados en este contexto, parece que hay acuerdo general entre los historiadores acerca de la muerte de Arquímedes, en tanto que su vida quedó truncada por la espada de un soldado romano. Es posible que una de las tres opciones que ofrece Plutarco sea la más viable, ya sea por lo recurrente en el resto de la literatura o por el romanticismo que exhala dicha historia:

> [...] hallábase este casualmente entregado al examen de cierta figura matemática, y, fijos en ella su ánimo y su vista, no sintió la invasión de los romanos ni la toma de la ciudad. Presentósele repentinamente un soldado, dándole orden de que le siguiese a casa de Marcelo; pero él no quiso antes de resolver el problema y llevarlo hasta la demostración; con lo que, irritado el soldado, desenvainó la espada y le dio muerte.

La literatura cuenta que el enfado del soldado fue mayúsculo cuando Arquímedes pronunció su supuesta última frase: «No molestes mis círculos». No se conocen con certeza los pormenores de la acción que terminaría con la vida del sabio siracusano, pero son muchos los testimonios de varios historiadores y todos coinciden en que fue, efectivamente, un soldado el que estuvo implicado. Fuera de una u otra forma, lo cierto es que a Marcelo no le agradó en absoluto la desafortunada noticia de la muerte del que llamaría «geómetra Briareo», sobre todo porque era para él «tanta gloria la conservación

LAS GUERRAS PÚNICAS

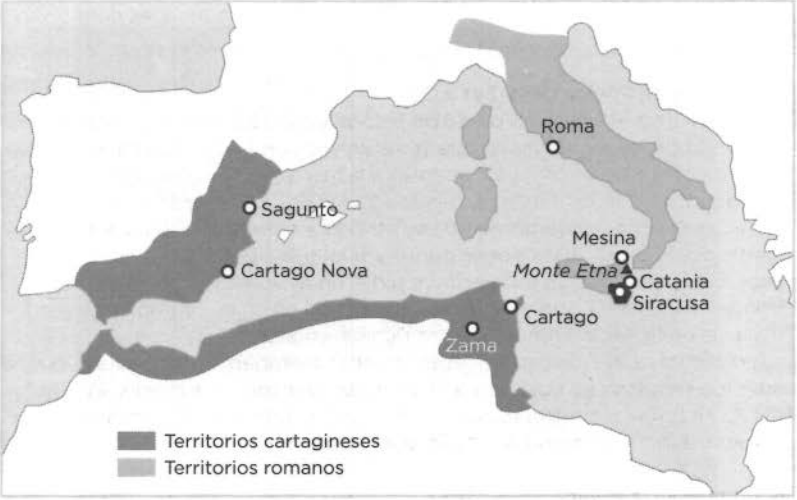
Las guerras púnicas enfrentaron Roma y Cartago entre los años 264 a.C. y 146 a.C. El nombre proviene del latín *punici*, término que deriva de *phoenici*, voz que usaban los romanos para hablar de los cartagineses, haciendo referencia a sus ancestros fenicios. La causa principal fue la expansión de Roma mediante su adhesión a la Magna Grecia. Se trata de una serie de tres guerras, de las cuales nos interesan las dos primeras, por ser Arquímedes contemporáneo a ellas.

Primera Guerra Púnica (264-241 a.C.)
El conflicto tuvo Sicilia como punto de partida y duró 23 años. Los mamertinos eran un grupo de mercenarios que se refugiaron en Messana, actual Mesina, al noreste de Sicilia. Se habían situado allí a la fuerza, expulsando a los hombres y quedándose con las mujeres, desde el año 289 a.C. Hierón II de Siracusa (ciudad griega en aquel momento) se atrevió a enfrentarse a los agitadores a partir del 270 a.C., para poner punto y final a la piratería que los caracterizaba. Sin embargo, los mamertinos pidieron ayuda a Roma, mientras que Siracusa se alió con Cartago. Esto desembocaría en un enfrentamiento a gran escala, es decir, en la Primera Guerra Púnica, en el 264 a.C. A pesar de la superioridad naval de los cartagineses, quienes evitaban la confrontación por tierra, los romanos se pusieron a la altura en tan solo dos meses. En el año 241 a.C. se firmó el control romano sobre Sicilia, ante la superioridad general de Roma, aunque Siracusa mantuvo la independencia.

Segunda Guerra Púnica (218-201 a.C.)
Durante este conflicto fue cuando Arquímedes desplegó sus inventos en Siracusa, ante el asedio romano; sin embargo, la ciudad fue tomada en el 211 a.C.

de Arquímedes que la toma de Siracusa». En la mitología griega, un «briareo» era un gigante de cien manos y cincuenta cabezas; así veía Marcelo al hombre que osó plantarle cara. Se cuenta que llegó a apartar de su presencia al soldado que dio muerte a Arquímedes, mientras que trató con todo el respeto, aprecio y distinción a los parientes del matemático. Sabemos por el historiador bizantino Juan Tzetzes (1110-1180) que Arquímedes «trabajó en geometría hasta una edad avanzada, viviendo setenta y cinco años», testimonio que permite situar la fecha de su nacimiento en el año 287 a.C.

La Segunda Guerra Púnica tuvo tres escenarios: Italia, Hispania y Sicilia. La guerra estalló con la toma de Sagunto por parte de Aníbal, general cartaginés que se propuso aniquilar Roma. En el año 201 a.C. Aníbal firmó la paz con Escipión el Africano (236-183 a.C.), resultando un balance claramente positivo para los romanos.



Distribución de territorios al final de la Segunda Guerra Púnica.

El relato de la muerte de Arquímedes nos muestra el tópico del científico despistado, absorto en sus pensamientos y despreocupado de las tareas comunes, e incluso del propio aspecto personal. En algunas ocasiones se dice que las películas y la literatura alimentan ese tópico, pero lo cierto es que ya los historiadores romanos lo usaron en la figura de Arquímedes, aunque no fuera de forma premeditada. Es evidente que el matemático griego se entregó al pensamiento abstracto, como prueban sus escritos, sin dejar de lado por completo los intereses experimentales, al menos ocasionalmente. Por tanto, es posible que fuera un hombre imbuido en sus pensamientos, que se debía a sus trabajos, enajenado en parte de la vida cotidiana. En aquella época ninguna persona con apuros económicos podía dedicarse en cuerpo y alma a las matemáticas; sin embargo, Arquímedes tuvo la suerte de estar bien posicionado, lo cual le permitió entregarse de por vida a sus investigaciones, alejándose, tal vez, de las realidades mundanas. Al respecto, en su obra *Vida de Marcelo* (Tomo II, XVII), Plutarco apunta:

> Así, no hay cómo no dar crédito a lo que se refiere de que, halagado y entretenido de continuo por una sirena doméstica y familiar, se olvidaba del alimento y no cuidaba de su persona; y que llevado por fuerza a ungirse y bañarse, formaba figuras geométricas en el mismo hogar, y después de ungido tiraba líneas con el dedo, estando verdaderamente fuera de sí, y como poseído de las musas, por el sumo placer que en estas ocupaciones hallaba.

A pesar de todo, es posible que también se exagere con exceso la animadversión que sentía Arquímedes por las cosas materiales. En su época no estaba bien visto entre los geómetras usar las manos para realizar construcciones ni máquinas de ningún tipo. El filósofo griego Platón (428-347 a.C.) criticó con dureza a los matemáticos griegos Eudoxo de Cnidos (390-337 a.C.) y Arquitas de Tarento (430-360 a.C.) por inclinarse hacia el arte de la maquinaria, puesto que era una forma de degradar la geometría al trasladarla de lo incorpóreo e intelectual a lo tangible y sensible. El uso de la geometría para los cuerpos se consideraba un oficio







FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Grabado anónimo del siglo XVI que representa a Arquímedes en la planificación de la defensa de Siracusa.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
Detalle de una página del palimpsesto de Constantinopla (foto: The Walters Art Museum, Baltimore, Estados Unidos).

FOTO INFERIOR:
***Muerte de Arquímedes*, de Édouard Vimont (1846-1930). Se piensa que sus últimas palabras fueron: «No molestes mis círculos».**

tosco, así que fue desviada de la atención de los filósofos y se consideró como parte de las artes militares. Sabemos por Plutarco que Arquímedes no dejaría nada escrito sobre sus ingenios, pues «tenía por innoble y ministerial toda ocupación en la mecánica». Sin embargo, «fue el tirano Hierón quien estimuló hacia ellos su ambición, persuadiéndole que convirtiese alguna parte de aquella ciencia de las cosas intelectuales a las sensibles, y que, aplicando sus conocimientos a los usos de la vida, hiciese que le entrasen por los ojos a la muchedumbre». El culto que tuvo Arquímedes por la geometría llegó a tal punto que pidió a los de su entorno que esculpieran uno de sus resultados matemáticos como epitafio. Así lo cuenta Plutarco:

> Habiendo, pues, sido autor de muchos y muy excelentes inventos, dícese haber encargado a sus amigos y parientes que después de su muerte colocasen sobre su sepulcro un cilindro con una esfera inscrita en él, poniendo por inscripción la razón del exceso entre el sólido continente y el contenido.

Hoy el epitafio está perdido, aunque parece que en el siglo I a.C. aún estaba visible, según narra el escritor romano Cicerón (106-43 a.C.) en *Disputaciones tusculanas*:

> [...] busqué el rastro de su tumba... y la encontré rodeada y cubierta de zarzas y matorrales; pues recordé ciertos versos sobre su tumba que había oído, según los cuales se habían colocado encima de su sepultura una esfera y un cilindro. Así pues, después de mirar cuidadosamente alrededor (pues hay un gran número de tumbas en la Puerta Agrigentina), descubrí una pequeña columna que se elevaba un poco sobre los arbustos, sobre la que había la figura de una esfera y un cilindro... Se enviaron esclavos con hoces... y cuando se hubo abierto paso, nos aproximamos al pedestal frente a nosotros; el epígrama fue fácil de encontrar con alrededor de la mitad de las líneas legibles, mientras que la última parte estaba completamente raída.

Quizá nunca lleguemos a saber cómo fue Arquímedes en su quehacer diario, cuáles fueron los detalles de las anécdotas rea-

les y cuáles eran sus verdaderas opiniones sobre los ingenios que pudo haber construido, pero no es del todo negativo que se pierda en la memoria del tiempo cómo se sucedieron realmente los hechos. Pasar de la historia a la historieta no debe tomarse solo como un inconveniente, sino que también significa una oportunidad. Todo el mundo recuerda al Arquímedes de sus años de estudios primarios como aquel científico que corría enloquecido por las calles de Siracusa gritando «¡Eureka!, ¡eureka!», celebrando de este modo el descubrimiento del hoy llamado *principio de Arquímedes*. Es poco probable que esta historia contada en el siglo I a.C. por el arquitecto romano Marco Vitruvio en *De architectura* fuera cierta; sin embargo, sirve para reforzar en nuestra memoria algo más importante que la historieta: la figura y los resultados científicos de Arquímedes. Y muchos incluso recuerdan que con ese descubrimiento solucionaría el problema de la corona de oro del tirano Hierón, pasaje que trataremos más adelante.

> «Entre todos los trabajos que se refieren a las disciplinas matemáticas, parece que el primer lugar puede ser reivindicado por los descubrimientos de Arquímedes, que confunden a las almas por el milagro de su sutilidad.»
>
> — Evangelista Torricelli.

EL LEGADO CIENTÍFICO DE ARQUÍMEDES

Los textos arquimedianos que se conservan no están escritos por regla general en lengua original (dórico, antiguo dialecto griego), sino que han llegado hasta nosotros en griego clásico, en bizantino y en árabe. Además, parece ser que la mayor parte de los escritos del genio de Siracusa no se han conservado y, por supuesto, no se conocen manuscritos del propio Arquímedes. Sus obras versan en su mayoría de matemáticas, aunque también dedica bastantes líneas a la física matemática (estática e hidrostática) o a la aplicación de las matemáticas a problemas concretos.

Los comentarios más tempranos sobre la obra de Arquímedes se deben a Herón (10-70), Papo (290-350) y Teón (335-405), todos ellos matemáticos alejandrinos. Sin embargo, la primera recopilación importante de los trabajos de Arquímedes no llegó hasta el siglo VI de nuestra era y recae en la figura del ya citado matemático griego Eutocio, siendo de gran importancia sus comentarios a las obras *Sobre la esfera y el cilindro*, *Sobre la medida del círculo* y *Sobre el equilibrio de las figuras planas*. En el mismo siglo, el arquitecto bizantino Isidoro de Mileto fue el responsable de la primera edición de los tres libros comentados por Eutocio, a la que se irían sumando otros trabajos hasta el siglo IX a medida que se iban redescubriendo. A partir de ahí, dos han sido las vías fundamentales por las que los trabajos de Arquímedes llegaron a Occidente: Bizancio y el mundo árabe.

Por la vía árabe, son verdaderamente destacables las traducciones del griego de la mano de Thabit ibn Qurra (836-901). Arquímedes fue desconocido en el Occidente medieval, pero el traductor flamenco Guillermo de Moerbeke (1215-1286) solucionaría este desaire publicando una traducción al latín en 1269. Esta edición y otras posteriores posibilitó que las obras más significativas de Arquímedes estuviesen disponibles en el Renacimiento. Por otra parte, la trágica muerte del astrónomo alemán Johann Müller Regiomontano, en 1476, impidió que este viese terminado su proyecto de imprimir algunas obras de Arquímedes para darles una difusión que no habría tenido parangón hasta el momento. Pero hubo que esperar poco, pues en 1544 Hervagius imprimió en Basilea la primera edición de todos los textos griegos conocidos hasta el momento, editados por Thomas Gechauff Venatorius, en griego y en latín. Así, los trabajos de Arquímedes tomarían un papel fundamental en los siglos XV-XVI, lo cual significó —sin duda— uno de los pilares en los que descansaría la primera revolución científica y elevó a Arquímedes a la posición de padre de la física matemática, puesto que sigue manteniendo, según la opinión de muchos historiadores de la ciencia.

Las primeras traducciones a lenguas modernas se basan en la edición de Basilea: edición alemana de Sturm (1670), la edición bilingüe grecolatina de Torelli (1792), la edición alemana de

OBRAS DE ARQUÍMEDES

En griego y de autoría aceptada por los expertos se han conservado:

1. *Sobre el equilibrio de las figuras planas* (2 libros).
2. *Sobre la cuadratura de la parábola.*
3. *El método sobre los teoremas mecánicos* (conocido como *El Método*).
4. *Sobre la esfera y el cilindro* (2 libros).
5. *Sobre las espirales.*
6. *Sobre los conoides y los esferoides.*
7. *Sobre los cuerpos flotantes* (2 libros).
8. *Sobre la medida del círculo.*
9. *El Arenario* o *El contador de arena.*
10. *El problema de los bueyes.*
11. *Stomachion* o *Loculus Archimedium.*

También han llegado en árabe o en su correspondiente traducción latina algunas obras que han sido adaptadas y citadas por otros autores o simplemente cuya autoría es dudosa:

12. *Sobre los poliedros regulares.* Resumido y citado por Papo.
13. *Sobre el heptágono.* Conservado en árabe.
14. *De iis quae in humido vehuntur.* La versión árabe está perdida, pero se conserva la traducción latina de Moerbeke (1286).
15. *El libro de los lemas o Liber assumptorum.* Conservado en árabe.
16. *Sobre los triángulos.* Conservado en árabe.
17. *Sobre las rectas paralelas.* Conservado en árabe.
18. *Sobre las propiedades de los triángulos rectángulos.* Conservado en árabe. Es posible que los dos anteriores y este sean un mismo libro, aunque los bibliógrafos árabes lo citan como tres distintos.
19. *Sobre las clepsidras.* Conservado en árabe.
20. *De speculo comburente concavitatis parabolae.* Citado por varios autores. Perdido.
21. *Sobre los fundamentos de la geometría.*
22. *Sobre los círculos tangentes.*
23. *Sobre las fechas.*
24. *Libro acerca del equilibrio de las figuras en que se emplean las palancas.* Citado por Herón. Perdido.
25. *Libro de los soportes.* Citado por Herón. Perdido.
26. *Libro de las palancas.* Citado por Herón. Perdido.
27. *Libro de la equivalencia de pesos*. Citado por Herón. Perdido.
28. *Sobre la construcción de esferas.* Citado por Papo. Perdido.
29. *Elementos de mecánica.*

Nizze (1824) y la edición francesa de Peyrard (1807). Ya en la época actual, y superando las anteriores, el trabajo de investigación, recopilación y traducción más importante se lo debemos a Heiberg. A finales del siglo XIX publicó una traducción de toda la obra conocida de Arquímedes hasta el momento, a partir de un manuscrito griego del siglo XV. En 1906, como ya se ha señalado, Heiberg descubrió el denominado «palimpsesto de Constantinopla», en el que encontró varios trabajos, incluido *El Método*. Otras recopilaciones y traducciones clásicas citadas en cualquier estudio de manera recurrente son la versión inglesa de Heath y las versiones holandesa e inglesa de Dijksterhuis. Estas últimas son de fácil acceso y lectura gracias a las múltiples reediciones y traducciones a distintos idiomas, dato que puede interesar a cualquiera que desee profundizar un poco en la obra del sabio de Siracusa.

«Arquímedes anticipa nuestro cálculo integral, tanto en el tiempo como en la seguridad de los procedimientos y en la genialidad de los artificios no superados por los precursores del siglo XVII.»

— PAOLO RUFFINI.

En los textos de Arquímedes y en líneas generales es inmediata la identificación de dos estilos narrativos: epistolar y científico. Ya se ha hablado de la correspondencia de Arquímedes y cómo gracias a ella sabemos algo sobre su vida. Respecto al estilo científico, sus obras se acercan más al ensayo científico que al texto docente, típico este último de su época y de los siglos siguientes. De hecho, los destinatarios de los tratados de Arquímedes no son estudiantes, ni mucho menos, sino que están dirigidos a personas con bagaje en el uso de la geometría, es decir, a sus iguales.

Es patente que recoger los descubrimientos y estudios de Arquímedes podría ocupar varios volúmenes. En la presente obra se estudian algunos de sus resultados: dedicaremos un capítulo a los trabajos sobre física matemática, otro a los resultados puramente matemáticos y un tercero a los ingenios que se suponen de su autoría.

EL PALIMPSESTO DE CONSTANTINOPLA

La forma en que el filólogo danés Heiberg dio a conocer una colección de obras de Arquímedes es digna del guión de una película de aventuras. Había oído hablar de un palimpsesto medieval conservado junto al Santo Sepulcro de Jerusalén, así que en 1906 tuvo la oportunidad de exhumarlo tras una dura búsqueda. Los palimpsestos son documentos que han sido sobrescritos sobre antiguos textos. Se trataba de un pergamino de piel de cabra de 185 páginas que es conocido como el «palimpsesto de Constantinopla», la actual Estambul. Al parecer, unos monjes ortodoxos del siglo XIII habían escrito sus textos litúrgicos sobre un conjunto de documentos que eran copias del siglo X: varias obras de Arquímedes y una carta a Eratóstenes. El amanuense no borró lo mencionado, sino que lavó la piel y escribió encima los textos religiosos. Heiberg llevó a cabo una labor extraordinaria mediante técnicas fotográficas: transcribió los textos de Arquímedes letra a letra, interpretó los dibujos y ordenó las hojas según la estructura inicial. El palimpsesto contiene siete tratados: las únicas copias hasta el momento conocidas de *Sobre los cuerpos flotantes* y *El método sobre los teoremas mecánicos*, y *Stomachion*, *Sobre el equilibrio de las figuras planas*, *Sobre las espirales*, *Sobre la medida del círculo* y *Sobre la esfera y el cilindro*.

El tratado más importante encontrado fue *El método sobre los teoremas mecánicos*, conocido habitualmente como *El Método* y que sirvió para terminar con la supuesta idea de que Arquímedes escondía sus herramientas metodológicas. También es destacable el hecho de que dedicase *El Método* a Eratóstenes, mediante una carta que se conserva. Es decir, quiso compartir su método con el que consideraba el matemático más brillante de su tiempo y, con ello, con el resto de la comunidad científica.

En 1920 el palimpsesto pasó a ser propiedad de un comprador privado y fue puesto en subasta en 1998. Aunque el gobierno griego llegó a pujar 1,9 millones de dólares, un comprador anónimo se hizo con el documento por 2,2 millones de dólares. El coleccionista anónimo, conocido como Mr. B, donó el palimpsesto al Walters Art Museum de Baltimore, Estados Unidos.

CAPÍTULO 2

¡Eureka!

El matemático Tales de Mileto suele ostentar el título del primer filósofo del que se tiene constancia en la historia. Tras varios siglos vería la luz el concepto de física, que tomaría un papel especial en la figura de Aristóteles. Sin embargo, la física en el sentido moderno tuvo su inicio de la majestuosa mano de Arquímedes: fue el primero en usar conceptos matemáticos y geométricos para explicar la realidad física.

El nombre de Arquímedes se ha grabado en la memoria de la cultura popular emparejado a los estudios sobre la flotabilidad de los cuerpos y a la ley de la palanca. Es fácil recordar el principio de Arquímedes gracias a la anécdota de la corona del rey Hierón y la carrera de un desnudo científico que gritaba «¡Eureka!» en mitad de la vía pública. Asimismo, la ley de la palanca viene acompañada de aquella afirmación atribuida a Arquímedes, a saber: «Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo».

En este capítulo no solo nos acercaremos a los principios científicos sino que también veremos qué hay de verdad en esas historias conocidas por todos y qué hay de mito y leyenda en ellas. Es curioso que, aun siendo cierto que contribuyó de manera decisiva a la historia de la física, no fue el tema principal en sus investigaciones ni tampoco el de sus propios intereses. Incluso el acercamiento que tuvo hacia la física fue mediante el uso de las matemáticas, convirtiéndose así en el primer físico matemático de la historia en el sentido estricto de la palabra. Fundó una nueva forma de investigar la naturaleza, lejos de las disertaciones especulativas y acariciando el método científico.

El mundo de las matemáticas griegas sobrevaloraba el método deductivo y Arquímedes no pudo despojarse completamente de ese sistema de trabajo. El sabio de Siracusa supo introducir la inducción a partir de la experiencia y combinarla

con la deducción. Tanto es así que inventó un método basado en esa idea; de hecho, sus trabajos sobre la palanca le condujeron a poder inducir resultados matemáticos que se tratarán en el capítulo siguiente.

Si bien la primera ley física descubierta por los griegos fue probablemente la de las proporciones numéricas de las longitudes de cuerdas o de las frecuencias musicales, la segunda documentada aparecería trescientos años después: la ley de la palanca de Arquímedes. Fue, por tanto, el primer matemático que pudo adaptar la geometría de su momento histórico a fenómenos físicos. La investigación que llevó a cabo estuvo basada en lo que hoy podríamos denominar una física intuitiva, cercana al experimentador, fácil de mostrar experimentalmente y que forma parte de la realidad de cualquier persona. Tuvo la genial idea de utilizar y explotar al máximo el recurso *cetere paribus*, que puede traducirse libremente del latín como «permaneciendo el resto constante». Dicho de otro modo, se percató de que para estudiar cualquier magnitud física debía fijarse solo en la magnitud a estudiar, simplificando el problema y haciendo que el resto de magnitudes no influyeran, es decir, que permanecieran constantes. Para ello usó por primera vez idealizaciones de objetos físicos en un texto matemático, tal es el caso de palancas con barras sin masa y cuerpos con figuras geométricas concretas y definidas. Por último, no se interesó solamente por las famosas palancas y por la flotabilidad, también escribió un libro, *El Arenario*, en el que se intuye su inclinación por la astronomía. Además, entre su obra se ha perdido otro libro, *Catóptrica*, donde hablaba de la luz y que se volverá a nombrar en el capítulo final, cuando se presenten algunos de sus ingenios.

El filósofo griego Aristóteles escribió varios libros relacionados con la física, pero destaca, precisamente, el conocido con el nombre de *Física*. El término proviene del griego y significa «naturaleza», es decir, la física estudia los fenómenos naturales. Aunque contribuyó con buenos planteamientos en otros campos del saber, en cuestión de física Aristóteles no introdujo grandes avances, es más, supuso un retroceso durante todo el Medievo. Pero el problema realmente fue que sus ideas calaron con profundidad

entre la comunidad científica de la época y hasta los siglos XV y XVI el ser humano no se permitió refutar las instauradas ideas del filósofo. Sería en el entorno de la primera revolución científica cuando personajes como Galileo mostrarían una visión más adecuada del movimiento y Newton integraría una serie de resultados para demostrar que cielo y tierra se rigen por las mismas reglas naturales.

> «Podríamos obtener demostraciones perfectas de los libros de Arquímedes, a nosotros no nos repele la espinosa lectura de ellos.»
>
> — **Johannes Kepler.**

Arquímedes tenía la clave para superar la física aristotélica, aunque fue desoído durante siglos. Aristóteles puso de moda los conceptos de gravedad y levedad, siendo lo primero lo que experimentan los cuerpos que caen y lo segundo lo que experimentan los cuerpos que flotan en el aire. Arquímedes, sin embargo, dio un vuelco al concepto introduciendo en sus textos la noción de masa específica o densidad, para hablar de la flotabilidad de los cuerpos. Así, un cuerpo flota en el aire porque su densidad es menor que la del aire. De paso, y de manera implícita, rechazaba la idea aristotélica de que el vacío no existe, a pesar de que, por ejemplo, Estratón de Lámpsaco (340-268 a.C.), filósofo griego y director del Liceo, la había defendido. Precisamente, Estratón demostró que el aire está compuesto por partículas. Del principio de flotabilidad de Arquímedes se pudo deducir que los cuerpos menos densos, al tener más volumen por unidad de masa, contienen más vacío entre sus partículas constituyentes. En este sentido, el atomismo de Leucipo y Demócrito ya tenía un par de siglos de existencia y daba pie a todo tipo de especulaciones. Lo que sí es evidente es que Arquímedes no dejó escrita ni una sola línea de suposiciones azarosas; más bien al contrario, utilizó en todo momento las matemáticas para demostrar y dar apoyo a sus afirmaciones, circunstancia que lo diferencia de los filósofos griegos de su época.

EL PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES Y LA CORONA DEL REY HIERÓN

Antes de presentar o recordar el principio de Arquímedes comenzaremos contando la historia que suele relatarse para hablar de dicho resultado. Tras el relato, se enunciará dicho principio, usando alguna relación matemática que servirá además para analizar, a posteriori, la historia introductoria. Finalmente se hará algún comentario acerca del tratado donde Arquímedes dejó escritas sus ideas sobre flotabilidad.

Hierón, el tirano de Siracusa y pariente de Arquímedes, encargó una guirnalda de oro a un joyero siracusano, para lo cual le dio la cantidad de metal necesario. Sin embargo, cuando recibió el encargo, sospechó de la autenticidad de la corona, pues pensaba que el artesano no había usado todo el oro, sino que la adulteró con plata para quedarse con la diferencia. Fue entonces cuando Hierón tuvo la genial idea de convocar a Arquímedes para presentarle sus sospechas, para ver si con sus astutos razonamientos podía resolver el problema. El genio no respondió en el momento, sino que prometió meditar sobre los hechos para encontrar un método que le diera la clave con la cual dilucidar el material utilizado.

Un día, en unos baños públicos, Arquímedes vio cómo se derramaba el agua de su bañera hacia el exterior, dándose así cuenta de cómo investigar la naturaleza de la guirnalda. Tal fue su alegría que saltó de la bañera y su reacción fue salir corriendo por las calles de Siracusa, desnudo, gritando: «¡Eureka!, ¡eureka!», es decir, «¡Lo he encontrado!, ¡lo he encontrado!». Lo que había hallado fue lo que se conoce como «principio de Arquímedes». Parece ser que el joyero había intentado estafar al tirano, como demostró Arquímedes. En la actualidad, todavía se usa el término «eureka» para hacer referencia al momento de la resolución de un problema.

Es bastante improbable que Arquímedes se paseara en paños menores por su propia ciudad gritando en todas direcciones como un enajenado. Sin embargo, la leyenda parece que se sustenta en algún hecho real, pues la detallan varios historiadores. El testimo-

nio más temprano se lo debemos al arquitecto romano Vitruvio y merece la pena transcribir la parte más importante, aparecida en su obra *De architectura*:

> Entre el gran número de admirables descubrimientos realizados por Arquímedes, hay que señalar el que voy a citar y en el que puso de manifiesto una sutileza casi increíble. Cuando Hierón reinaba en Siracusa, este príncipe, por los éxitos logrados en sus empresas, se propuso ofrecer en un cierto templo una corona de oro a los dioses inmortales. Convino la confección de la obra con un artesano mediante una buena suma de dinero y la entrega de la cantidad de oro en peso. El artesano entregó la corona en la fecha convenida con el rey, quien la encontró perfectamente ejecutada, pareciendo que contuviera todo el oro que le había entregado. Pero habiendo obtenido indicios de que el artesano había retenido una parte del oro, el rey, indignado ante ese engaño y no teniendo a mano los medios para demostrar al artesano su fraude, encargó a Arquímedes que se ocupase del asunto y que con su inteligencia encontrase esos medios. Un día que Arquímedes, preocupado por este asunto, entró por casualidad en una casa de baños, advirtió que a medida que se introducía en la bañera, el agua se desbordaba de la misma. Esta observación le hizo descubrir la razón que buscaba, y sin aguardar más por la alegría que este hecho le producía, salió del baño aún desnudo y corriendo hacia su casa gritaba: «¡Eureka!, ¡eureka!», es decir, «¡Lo he encontrado!, ¡lo he encontrado!».

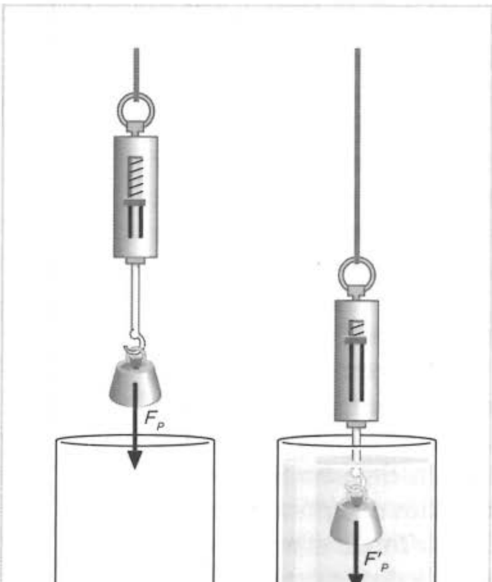
El principio de Arquímedes se estudia en todas las escuelas del mundo y se trata de una ley física de fácil comprensión intuitiva. Cualquier persona ha experimentado un descenso en su propio peso al bañarse en una piscina, ha visto globos surcando los cielos, barcos flotar en el mar o vídeos de submarinos descendiendo al fondo de los océanos. Todos los anteriores son solo algunos ejemplos que tienen como telón de fondo el principio de Arquímedes. En tiempos del sabio, muchos de los conceptos actuales no se conocían o se estaban estudiando. Así, tuvo que introducir el concepto de masa específica (densidad) para poder hablar de flotabilidad; sin embargo, no manejó el de fuerza, uti-

lizado hoy para estudiar el principio de Arquímedes, también llamado *principio de la hidrostática*. Hay muchos modos de enunciarlo; una forma muy común es la siguiente: «Todo cuerpo sumergido total o parcialmente en agua u otro fluido sufre un empuje vertical y hacia arriba que es igual al peso del agua o fluido desalojado por el cuerpo».

El peso de un cuerpo en el aire siempre será mayor que su peso en un fluido. El peso aparente en el fluido será igual al peso real en el aire menos la fuerza de empuje. Por tanto, una forma de calcular el empuje sufrido (F_E) por un cuerpo es medir el peso en el aire (F_P), luego en el fluido (F'_P), y restar ambas cantidades: $F_E = F_P - F'_P$.

Usando la terminología actual, el empuje y el peso son fuerzas, y hubo que esperar hasta los tiempos de Newton para poder realizar un tratamiento matemático serio y correcto de dichas magnitudes. Aun así, el principio de Arquímedes puede ser abordado mediante herramientas geométricas o echando mano del concepto de densidad.

Arquímedes aceptaba que para sumergir un cuerpo en agua (de ahora en adelante entiéndase por agua cualquier fluido, es decir, líquidos y gases), debía desplazarse una cantidad de agua igual al volumen del cuerpo sumergido. Esta es la razón por la cual la anécdota del baño sirve de contexto para el principio de la hidrostática: si se introduce un cuerpo en una bañera colmada de agua, parte del agua tendrá que salir, es decir, el punto de partida es que $V_{\text{parte sumergida}} = V_{\text{agua desalojada}}$.



En términos de fuerza, lo que ocurre es que el agua (o cualquier fluido) ejerce una fuerza de empuje sobre el cuerpo que se sumerja (véase la figura); esta fuerza de empuje F_E es idéntica en valor absoluto a la fuerza peso F_P del fluido desplazado. Es decir: $F_E = F_{P(\text{agua})}$.

La fuerza peso del agua desplazada se calcula con el producto de la masa de agua por la aceleración gravitatoria (de media, el valor en la Tierra es de 9,8 m/s^2): $F_{P(\text{agua})} = m_{\text{agua}} \cdot g$. Pero atendiendo a

la expresión matemática de la densidad, es decir, $d_{agua} = m_{agua}/V_{agua}$, se puede escribir: $F_{P(agua)} = V_{agua} \cdot d_{agua} \cdot g$. Ya hemos dicho que el volumen del agua desalojada debe ser igual al volumen de la parte del cuerpo sumergido, de lo cual se infiere que $F_{P\ (agua)} = V_{cuerpo} \cdot d_{agua} \cdot g$.

Finalmente, y prescindiendo de los subíndices, como el peso del agua desalojada es idéntico al empuje sufrido por el cuerpo, el principio de la hidrostática puede enunciarse mediante la expresión matemática $F_E = V \cdot d \cdot g$, donde F_E es la fuerza de empuje experimentado por el cuerpo, medida en newtons (N); V el volumen sumergido del cuerpo, medido en m^3; d la densidad del fluido, medida en kg/m^3; y g la aceleración gravitatoria.

DEL MITO A LA REALIDAD

Como ocurre con cualquier leyenda, el asunto de la corona de oro del rey Hierón tiene parte de realidad y parte de mito. Se ha llegado a afirmar que incluso hay algo de ficción en la forma de la suposición científica que se atribuye a Arquímedes a la hora de descubrir el engaño del astuto joyero.

Arquímedes sí pudo demostrar que el artesano incurrió en un fraude, pero mediante otro método más elaborado, usando no solo el principio de la hidrostática sino también el de la palanca. Veamos a continuación los comentarios que realizó Marco Vitruvio al respecto:

> A raíz de este descubrimiento encargó entonces dos masas de igual peso que el de la corona, una de oro y otra de plata. Sumergió luego la masa de plata en un vaso, lo que hizo salir una cantidad de agua igual al volumen de esa masa y volvió a llenar el vaso con una igual cantidad de agua que había salido y que se preocupó de medir, de manera que pudo conocer la cantidad de agua que correspondía a la masa de plata que había introducido en el vaso. Después de esa experiencia sumergió igualmente la masa de oro en el vaso lleno de agua, y después de haberla retirado midió nuevamente el agua desalojada, encontrando que la masa de oro no había desalojado tanta agua como la de plata y que la diferencia en menos era igual a la

diferencia entre los volúmenes de la masa de oro y de la masa de plata de igual peso. Finalmente volvió a llenar el vaso sumergiendo esta vez la corona, que desalojó más agua de la que había desalojado la masa de oro de igual peso, pero menos de la respectiva de la masa de plata. Calculando entonces, de acuerdo con esas experiencias, en cuánto la cantidad de agua que la corona había desalojado era mayor de aquella que había desalojado la masa de oro, conoció cuánta era la plata que se había mezclado al oro, mostrando claramente el fraude del artesano.

Aunque la idea es del todo correcta y precisa, vamos a comprobar cómo habría sido muy complicado que realmente Arquímedes siguiera ese método al pie de la letra. El inconveniente se observa en la medida de los volúmenes. En primer lugar, para una mejor comprensión del problema, enumeremos y ordenemos los pasos que sugiere Vitruvio:

1. Tomó dos masas idénticas a la corona, una de plata (m_p) y otra de oro (m_o).

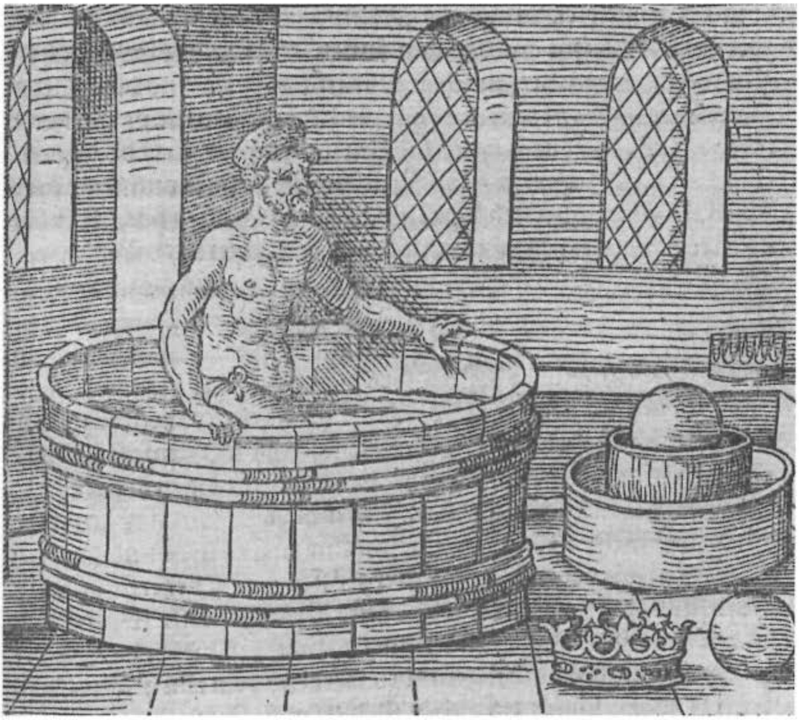
2. En segundo lugar, introdujo la plata en una cantidad fija de agua, desalojando un volumen V_p del líquido, el cual midió.

3. A continuación, introdujo el oro en la misma cantidad de agua, desalojando un volumen V_o del líquido, el cual midió oportunamente.

4. Observó que V_p era mayor que V_o.

5. Introdujo la corona real en la misma cantidad de agua, desalojándose un volumen V_c del líquido, el cual midió.

6. Observó que el volumen V_c desalojado por la corona era mayor que el desalojado por el oro y menor que el desalojado por la plata ($V_p > V_c > V_o$). Esto demostró que la corona estaba adulterada con plata, es decir, que no había sido construida solo con oro.



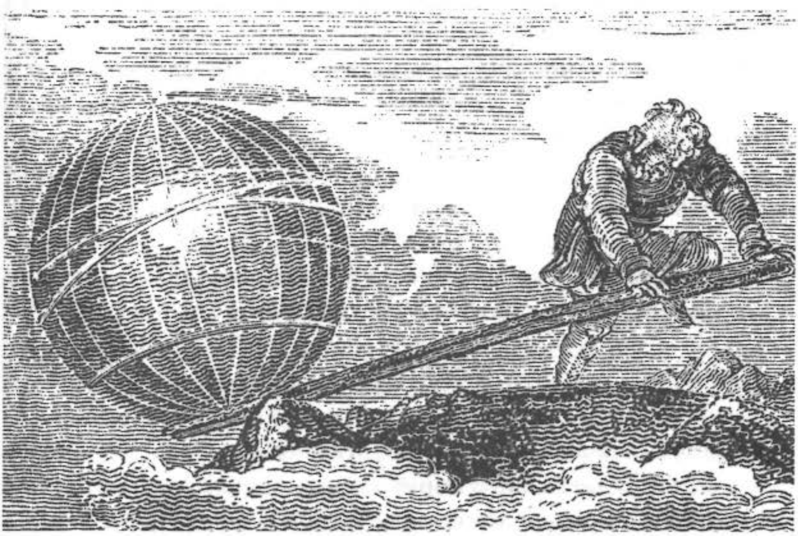


FOTO SUPERIOR:
Cuenta la leyenda que mientras estaba en unos baños públicos, Arquímedes encontró la solución al problema de la corona de oro planteado por el rey Hierón. Grabado de 1575.

FOTO INFERIOR:
Entre las frases más destacadas que se atribuyen al sabio de Siracusa se encuentra la célebre «Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo», citada por Papo de Alejandría en el Libro VIII de *Sinagoga*. En la imagen se reproduce un grabado perteneciente a la edición berlinesa de Friedrich Otto Hultsch, en 1878.

Reproduzcamos ahora los pasos con un caso viable, lo más fielmente posible con los datos reales de los que disponemos, para lo cual seguiremos la misma numeración anterior, para poderlos contrastar si se cree necesario. Recuérdese que, como se ha apuntado anteriormente, cualquier objeto introducido en un líquido desaloja una cantidad de líquido igual a su volumen. El volumen de un objeto puede calcularse a partir de su densidad y de su masa, gracias a la conocida expresión $d = m/V$.

1. Para ser generosos con los cálculos, tomaremos como referencia la guirnalda de oro más grande que se conserva de aproximadamente la época de Arquímedes; se trata de la guirnalda de Vergina, la cual data en torno al siglo IV a.C. La corona tiene una masa de 714 g y un diámetro de 18,5 cm. Teniendo en cuenta que ha perdido varias de sus hojas, y para facilitar la lectura, supongamos una masa de 1 000 g para ser aún más generosos en los resultados finales. Por tanto, para realizar la prueba, tenemos 1 000 g de plata, 1 000 g de oro y 1 000 g de una corona cuyo material se pretende poner a prueba.

2. En segundo lugar, introduzcamos los 1 000 g de plata en agua. Puesto que la densidad de la plata es 10,5 g/cm^3, el volumen desplazado de agua será 95,2 cm^3:

$$V_p = \frac{m_p}{d_p} = \frac{1\,000 \text{ g}}{10{,}5 \text{ g/cm}^3} = 95{,}2 \text{ cm}^3.$$

3. En tercer lugar, introduzcamos los 1 000 g de oro en agua. Puesto que la densidad del oro es 19,3 g/cm^3, el volumen desplazado de agua será 51,8 cm^3:

$$V_o = \frac{m_o}{d_o} = \frac{1000 \text{ g}}{19{,}3 \text{ g/cm}^3} = 51{,}8 \text{ cm}^3.$$

4. El volumen de agua desalojado por los 1 000 g de plata es mayor que el desalojado por los 1 000 g de oro, puesto que

la densidad de la plata es menor y se necesita más espacio para contener la misma masa.

5. A continuación se introduce la corona en agua y se mide la cantidad de agua desalojada. Sobre este dato tenemos que especular: supondremos que el oro de la corona fue sustituido por plata en un 30%.

6. Al introducir la corona en agua se observa que se desaloja más cantidad que en el caso del oro y menos que en el caso de la plata. El volumen de la corona será, según la suposición, un 30% el volumen de los 1 000 g de plata más un 70% el volumen de los 1 000 g de oro:

$$V_c = 30\% \cdot V_p + 70\% V_p =$$
$$= \frac{30 \cdot 95{,}2 \text{ cm}^3}{100} + \frac{70 \cdot 51{,}8 \text{ cm}^3}{100} = 64{,}8 \text{ cm}^3.$$

El volumen desplazado por la corona (64,8 cm^3) es mayor que el desplazado por el oro (51,8 cm^3), lo cual demostraría el fraude del joyero.

Pero, ¿cómo medir estos volúmenes tan pequeños? Nótese que la diferencia es de 13 cm^3, aproximadamente el volumen de un par de garbanzos.

A lo largo de la historia se han sugerido varios métodos para la medición, de los cuales nos quedamos aquí con dos: medir la altura a la que llegaría el agua en un recipiente del que no se desborda, o bien recoger la cantidad de agua desalojada en un recipiente aparte. La primera opción se muestra como imposible para una medición en la época, y la segunda, como un subterfugio experimental alejado de la realidad de Arquímedes. Según el primer método, al introducir la corona o algunos de los metales en un recipiente no lleno hasta el borde, el nivel del agua sube cierta altura. Si el recipiente es un cilindro (véase la figura), el volumen de la corona sumergida coincide con un volumen igual de agua que «sube», en forma de cilindro. Supongamos un recipiente de un

diámetro de 20 cm, lo que da una superficie de 314 cm². Con estos datos podemos calcular la altura (h) que ascenderá el agua en cada uno de los casos:

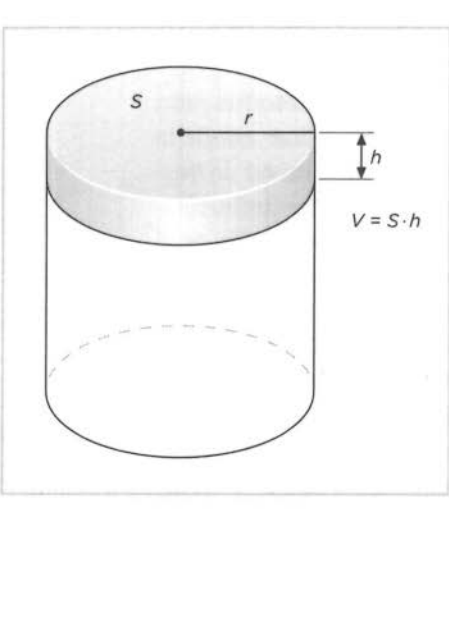
$$h_{\text{plata}} = \frac{V_p}{S} = \frac{95{,}2\ \text{cm}^3}{314\ \text{cm}^2} = 0{,}30\ \text{cm} = 3{,}0\ \text{mm}$$

$$h_{\text{oro}} = \frac{V_o}{S} = \frac{51{,}8\ \text{cm}^3}{314\ \text{cm}^2} = 0{,}170\ \text{cm} = 1{,}7\ \text{mm}$$

$$h_{\text{corona}} = \frac{V_c}{S} = \frac{64{,}8\ \text{cm}^3}{314\ \text{cm}^2} = 0{,}21\ \text{cm} = 2{,}1\ \text{mm.}$$

Es decir, la diferencia de altura entre una corona de oro y la corona adulterada ($h_c - h_o = 0{,}4$ mm) es de ¡menos de medio milímetro! Recordemos que estos cálculos son aproximados, pero en cualquier caso varían poco si se hacen unas u otras suposiciones; además, se han realizado las operaciones para obtener resultados que puedan medirse lo mejor posible. ¿Era viable que Arquímedes midiese esta diferencia? Difícilmente, debido a que incluso se confunde con el menisco del líquido, es decir, la curvatura que se produce en las superficies líquidas por las interacciones con las paredes del recipiente.

El volumen de un cilindro se calcula multiplicando la superficie de una de sus bases por la altura.



Descartada la primera posibilidad, algunos estudiosos han sugerido que lo que hizo Arquímedes fue recoger el agua fuera del recipiente, o sea, seguir al pie de la letra las palabras de Vitruvio. Para ello, podría haber usado un reloj de agua o clepsidra, un recipiente que consiste en una simple vasija con un pequeño orificio por el que puede salir el agua para medir

el tiempo. La hipótesis se refuerza con el hecho de que en la época ese instrumento era muy usado y se conocía desde el antiguo Egipto. De hecho, el griego Ctesibio construyó una clepsidra en los tiempos de Arquímedes. Los pasos a seguir mediante el método de la clepsidra serían:

Paso 1. Se tapa el agujero y se rellena la vasija con agua, de forma que al introducir un cuerpo el agua no rebose.

Paso 2. Se introduce en la vasija el lingote de oro de igual masa que la corona.

Paso 3. Se destapa el agujero y se deja que salga el agua por él hasta que se alcance un equilibrio.

Paso 4. Se extrae el lingote y se tapa de nuevo el agujero.

Paso 5. Se introduce la corona.

Paso 6. Se destapa el agujero. Si sale agua quiere decir que el volumen de la corona es mayor que el del lingote, lo cual significa que está adulterada y que contiene otro elemento. Si el agua sube justo hasta el nivel del agujero, la corona está construida con oro puro.

Se ha comprobado experimentalmente que con este método pueden medirse diferencias de 10 cm^3, que es el volumen del que estamos hablando. En cualquier caso, en el relato de Vitruvio no se hace referencia al material usado, por lo que no se dispone de pruebas que corroboren este procedimiento. A pesar de todo, ninguno de los dos métodos expuestos (altura del agua y clepsidras) hace honor a la realidad contextual de Arquímedes. Cualquier especialista en su obra trabaja con los textos del matemático, y no solo con las fuentes secundarias, como es el caso de Vitruvio y la literatura posterior. Así que afirmar que los hechos tal como los cuenta el historiador romano podrían ser incorrectos no es menospreciar el talento de Arquímedes, sino todo lo contrario, puesto

CTESIBIO DE ALEJANDRÍA Y LA CLEPSIDRA

Ctesibio de Alejandría (285-222 a.C.) es considerado actualmente como el padre de la neumática, por haber escrito el primer tratado científico sobre el aire comprimido y su aplicación para bombas neumáticas. Entre las muchas invenciones y descubrimientos que se le atribuyen se encuentran un órgano acuático, el principio científico del sifón y la clepsidra (en la imagen), un reloj de agua extremadamente preciso para la época que funcionaba evacuando agua lentamente por un orificio practicado para tal efecto. Tal era la precisión de la clepsidra que se llegó a usar en asuntos legales y administrativos como medida de paso del tiempo.



Reconstrucción de una clepsidra de fines del siglo v a.C. Museo del Ágora de Atenas (foto: Marsyas).

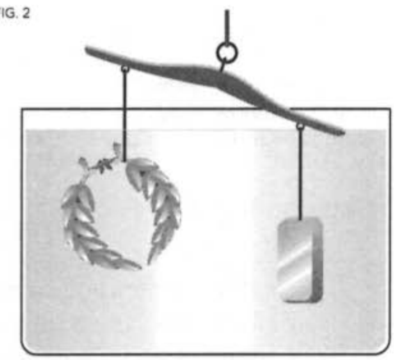
que todo indica que su genialidad fue todavía más allá. Y es que se da la circunstancia de que en toda su obra escrita está plasmado el uso de las leyes de la palanca. ¿Por qué no lo iba a usar en el asunto de la corona de oro? En efecto, veamos una propuesta que se repite en los ensayos de muchos expertos. Como han mostrado los cálculos anteriores, los 1 000 g de oro puro y los 1 000 g de la corona desalojan volúmenes de agua distintos; por consiguiente, desalojan distintas masas de agua. En concreto, 51,8 g en el caso del oro puro y 64,8 g en el caso de la corona. ¿Podía Arquímedes medir una diferencia de 13 g de agua? Sí podía, pero no con la lectura en la altura del nivel del agua o el método de la clepsidra; podría haberla medido mediante el uso de una balanza de brazos iguales, un método matemático que usó a lo largo de toda su carrera. Por tanto, la idea sería la siguiente: si colocamos a ambos lados de una balanza de brazos iguales el lingote de 1 000 g de oro y la corona de 1 000 g, dicha balanza estará equilibrada debido a la equivalencia de las masas (figura 1), pero si ambos objetos se introducen en

agua, la balanza se desequilibra debido a que las masas aparentes no son iguales (figura 2). ¿Por qué? Porque según el principio de la hidrostática el empuje sufrido por el cuerpo será igual al peso de agua desalojada, que será distinta en cada uno de los casos. Es decir, el peso aparente del objeto de mayor volumen (corona) será inferior que el peso aparente del objeto de menor volumen (lingote); por tanto, la balanza estará inclinada hacia el lingote de oro. Este procedimiento es perfectamente viable según el elenco de la obra científica de Arquímedes. Tan solo necesitaba un entorno falto de aire y una balanza lo suficientemente precisa como para poder inclinarse ante unos pocos gramos, algo que estaba a su alcance. De hecho, científicos de la talla de Galileo han mostrado que este método era plausible.

FIG. 1



FIG. 2



CÓMO FLOTAR

Un cuerpo flotará en un líquido si su densidad es menor que la del líquido, se hundirá si su densidad es mayor y se encontrará en una situación de equilibrio si ambas densidades son iguales. Este resultado conocido de forma popular y que explicó por primera vez Arquímedes puede demostrarse a partir de procedimientos dinámicos, comparando la fuerza de empuje del fluido y la fuerza peso del objeto sumergido en él. Si el lector se pierde en algún momento puede obviar sin problemas las siguientes líneas, pues tan solo vienen a reforzar las ideas de Arquímedes en un lenguaje moderno.

UN GIGANTE SOBRE EL AGUA

El agua presenta una curiosa anomalía que es la razón, entre otras cosas, de que puedan existir los océanos y la propia vida: en estado sólido es menos densa que en estado líquido. Esto significa que un trozo de hielo puede flotar libremente sobre el agua líquida. Es lo que ocurre, por ejemplo, con los icebergs. La palabra iceberg proviene del neerlandés, a través del inglés, y significa, literalmente, «témpano de hielo». Se trata de gigantescos pedazos de hielo de agua dulce que quedan a la deriva en el océano y suelen ser arrastrados a latitudes más bajas, por ejemplo, por la corriente del Labrador y la de Groenlandia. Cuando un iceberg flota, lo hace hundiendo parte de su propio volumen en el agua líquida. La razón dinámica es que se igualan así el peso del iceberg (P) con el empuje (E) realizado por el agua líquida, el cual será idéntico en número al peso del agua que cabe en el volumen ocupado por el iceberg (V_S).

Fuerzas	Volúmenes	Densidades	Fórmula
E (Empuje realizado por el agua)	V_S (Sumergido)	d_a (Agua salada)	$E=V_S \cdot d_a \cdot g$
P (Peso del iceberg)	V_C (Completo)	d_l (Agua dulce)	$P=V_C \cdot d_l \cdot g$

El empuje sufrido por el iceberg será $E=V_S \cdot d_a \cdot g$, siendo d_a la densidad del agua del mar. Por otro lado, el peso del iceberg completo será $P=V_C \cdot d_l \cdot g$, siendo d_l la densidad del iceberg, es decir, del agua dulce, y V_C el volumen del iceberg completo. Para saber la proporción de iceberg oculto y saliente basta con calcular la razón V_S/V_C. Simplemente hay que dividir la expresión del empuje y el peso y despejar, teniendo en cuenta que ambas fuerzas son iguales ($E=P$), debido a que el iceberg está en equilibrio.

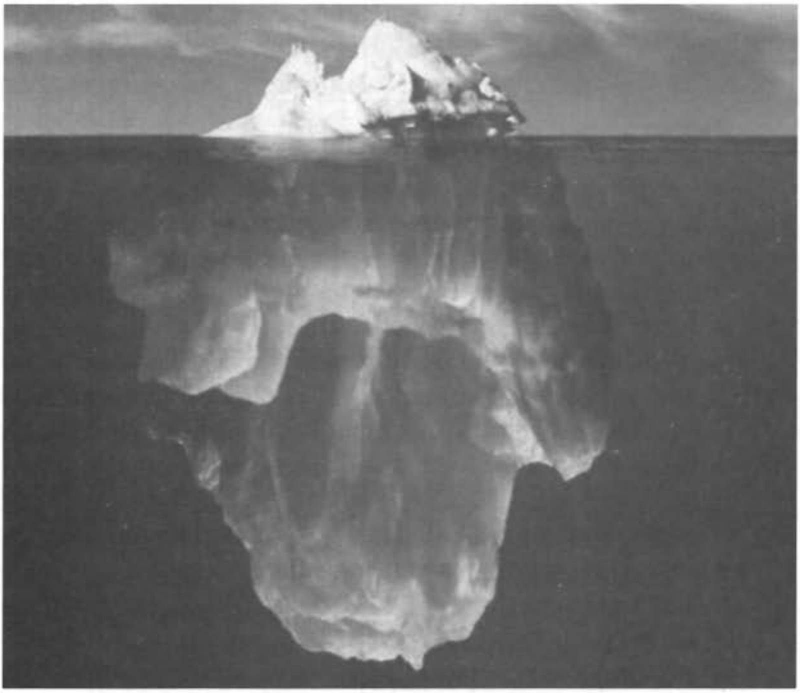
$$\frac{E}{P}=\frac{V_S \cdot d_a \cdot g}{V_C \cdot d_l \cdot g}=\frac{V_S \cdot d_a}{V_C \cdot d_l} \rightarrow \frac{V_S}{V_C}=\frac{E \cdot d_l}{P \cdot d_a} \rightarrow \text{Como } E=P \rightarrow \frac{V_S}{V_C}=\frac{d_l}{d_a}.$$

Es decir, la proporción entre el volumen sumergido de iceberg y el volumen total será igual a la proporción de la densidad del iceberg respecto a la den-

sidad del agua donde flote. La densidad del iceberg (agua dulce en forma sólida) es de 0,92 g/cm^3 y la densidad del agua del mar es variable (depende de la temperatura y de la salinidad, entre otros factores), y aquí tomaremos un valor de 1,03 g/cm^3; el resultado variará dependiendo de lo que se afine en la medida de las densidades.

$$\text{Porcentaje sumergido} = \frac{0{,}92}{1{,}03} \cdot 100 = 89{,}3\%.$$

Por lo tanto, prácticamente todo el iceberg está sumergido en el agua, hasta casi un 90 %.



Los icebergs existen gracias a que el agua en forma sólida tiene menor densidad que en estado líquido. De no ser así, el hielo se acumularía en el fondo de los océanos.

Obsérvense los razonamientos matemáticos que siguen teniendo en cuenta que:

m_c: masa del cuerpo.
m_a: masa desalojada de agua (o de cualquier fluido).
d_c: densidad del cuerpo.
d_a: densidad del agua.
V: volumen sumergido del cuerpo y desalojado de agua.

Se hunde
La fuerza peso es mayor que la fuerza de empuje:

$$F_P > F_E \rightarrow m_c \cdot g > V \cdot d_a \cdot g \rightarrow V \cdot d_c > V \cdot d_a \cdot g \rightarrow d_c > d_a$$

El cuerpo se hunde si su densidad es mayor que la del agua.

Flota
La fuerza peso es menor que la fuerza de empuje:

$$F_P < F_E \rightarrow m_c \cdot g < V \cdot d_a \cdot g \rightarrow V \cdot d_c < V \cdot d_a \cdot g \rightarrow d_c < d_a$$

El cuerpo flota si su densidad es menor que la del agua.

En equilibrio
La fuerza peso es igual a la fuerza de empuje:

$$F_P = F_E \rightarrow m_c \cdot g = V \cdot d_a \cdot g \rightarrow V \cdot d_c = V \cdot d_a \cdot g \rightarrow d_c = d_a$$

El cuerpo permanece en una posición de equilibrio si su densidad es igual a la del agua.

«SOBRE LOS CUERPOS FLOTANTES»

Arquímedes recogió una buena parte de las ideas en torno al principio de la hidrostática en su tratado *Sobre los cuerpos flotantes*, el único sobre el asunto que ha llegado hasta nuestros días. Tal vez sea el más conocido del conjunto de la obra de Arquímedes y, sin duda, la mayor muestra de su genialidad. Aunque

el método deductivo está presente a lo largo de todas sus líneas, se intuye que acudió repetidamente a la realidad física para poder llegar a sus conclusiones, adelantándose así casi dos mil años al método científico experimental que se desarrollaría en los siglos XVI y XVII.

> «Son la maduración y la asimilación de la obra de Arquímedes las que sirven de base a la revolución científica que se realizará en el siglo XVII.»
>
> — ALEXANDRE KOYRÉ.

El tratado consta de dos libros. El Libro I se abre con un preámbulo al que siguen nueve proposiciones, y el Libro II está formado por un total de diez proposiciones. En el primer libro se explica la ley del equilibrio de los líquidos y se demuestra que el agua adopta una forma esférica alrededor de un centro de gravedad; en concreto, se está refiriendo al centro de la Tierra. Se está asumiendo que la Tierra es, efectivamente, esférica, tal como afirmaban los astrónomos griegos de la época, como, por ejemplo, Eratóstenes. Esta fue la propia percepción del mundo que tenía Arquímedes. En el tratado se muestra por primera vez en la historia de la ciencia el concepto de peso específico o densidad, aunque el texto original carece de terminología propia que lo describa. También se estudian las tres posibilidades de deposición de un cuerpo en un líquido respecto a las densidades relativas: un cuerpo de igual densidad que el líquido (proposición 3), un cuerpo de menor densidad que el líquido (proposiciones 4-6) y un cuerpo de mayor densidad que el líquido (proposición 7). Lo que hoy se conoce como principio de Arquímedes o principio de la hidrostática se extrae de las proposiciones 6 y 7, como veremos. En el Libro II se analizan las distintas posiciones de equilibrio de las secciones de los paraboloides. Hay que tener en cuenta que Arquímedes vivió en una Siracusa dominada por el mercado marítimo y militar, por lo que tal vez estuviera motivado por las formas de los cascos de los barcos y quisiera emularlas con las figuras geométricas que conocía.

Como se ha dicho con anterioridad, el Libro I se abre con un preámbulo, en el cual se supone previamente que el líquido es presionado verticalmente por el líquido que está justo encima de él. Esta hipótesis es cierta y toma todo su sentido a partir de la ley de gravitación universal de Newton, puesto que el propio fluido tiene peso y ejerce una fuerza sobre el líquido que está por debajo. También son muy acertadas las proposiciones 1 y 2, que llevan a afirmar que la superficie de un líquido en reposo es esférica con centro en la Tierra: «La superficie de todo líquido en estado de

SUBIR Y BAJAR EN UN FLUIDO

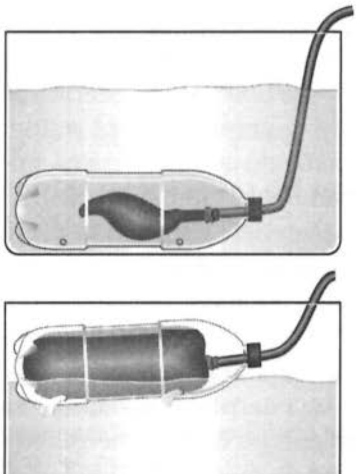


FIG. 1

Muchos peces poseen un órgano llamado vejiga natatoria que les proporciona la posibilidad de controlar a voluntad su densidad, para así subir o bajar dentro del agua sin necesidad de mover sus músculos externos. El mecanismo consiste en aumentar el contenido de gas en sangre para poder ascender y lo consiguen mediante reacciones químicas, puesto que son capaces de liberar oxígeno y dióxido de carbono en su torrente sanguíneo. Es habitual ver en museos y ferias de la ciencia una sencilla construcción experimental para visualizar este extraordinario producto de la evolución, mediante el uso de un globo, un tubo y una botella (figura 1). Se introduce el globo dentro de la botella llena de agua, en la que previamente se ha practicado un orificio para que el agua pueda entrar y salir. El globo se sitúa en el interior de la botella y se comunica con el exterior mediante algún tipo de tubo, desde el cual se controlará el paso del aire. Dentro de un recipiente con una cierta cantidad de agua, cuando se llena el globo de aire, la densidad del conjunto disminuye, y, por tanto, sube. Cuando se vacía el globo de aire, el espacio es ocupado por el

inmovilidad tendrá la figura de una esfera que tendrá por centro el mismo que la Tierra».

La proposición 3 muestra un grado de abstracción sin precedentes: si un cuerpo tiene la misma densidad que el líquido en el que se sumerge, se quedará en el lugar del líquido donde se sitúe, es decir, se encontrará en equilibrio hidrostático.

Por otra parte, si se deposita un cuerpo en un líquido, siendo la densidad del cuerpo menor que la del líquido, solo se sumergirá en parte. Este resultado se recoge cualitativamente en la propo-

agua y la densidad aumenta, es decir, se hunde. El dispositivo no solo representa esquemáticamente la vejiga natatoria de los peces, sino que sirve para entender el propio funcionamiento de los submarinos.

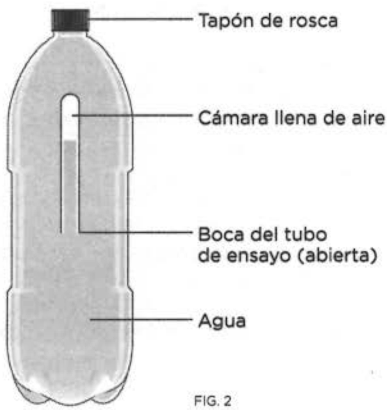
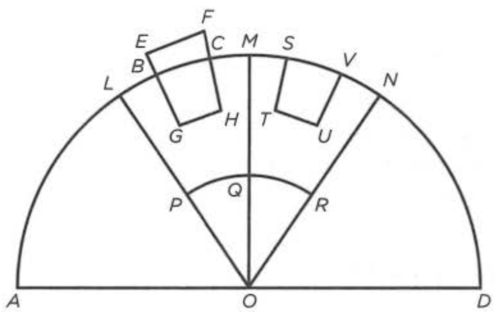


FIG. 2

Para construir un ludión casero tan solo se necesita una botella de plástico, un cilindro abierto por un lado (a modo de tubo de ensayo) y agua.

El diablillo de Descartes

Un clásico juego de física recreativa que emula el subir y bajar de un submarino es el ludión o diablillo de Descartes (figura 2). Consiste en un recipiente cerrado con agua en el que se ha introducido un objeto flotante parcialmente lleno de aire. El montaje se realiza de tal manera que se puede comprimir el agua, ya sea mediante una membrana en la tapa del recipiente o por la presión directa sobre sus paredes. El principio de Pascal dice que esta presión se comunicará a todos los puntos del líquido, de manera que llegará hasta el objeto presionando a su vez el aire que tiene dentro. Dada la gran compresibilidad del aire, disminuirá su volumen y, con ello, aumentará la densidad. Este hecho se traduce en el hundimiento del objeto. En conclusión, el ludión consiste en un sistema que permite variar la densidad de un objeto para controlar su estado de flotación.



En el tratado *Sobre los cuerpos flotantes* todas las demostraciones son puramente geométricas, un procedimiento habitual en su época. La imagen corresponde a la proposición 5 del Libro I, en la edición de Heath. El texto está repleto de imágenes como esta, las cuales vienen acompañadas de largas demostraciones geométricas. Se muestra a modo ilustrativo, pues este tipo de razonamientos son de difícil comprensión en la actualidad, con predominio del lenguaje algebraico y simbólico.

sición 4 y lo cuantifica respecto a las proporciones en la proposición 5 (véase la figura): el volumen de líquido que equivale al volumen sumergido debe tener el mismo peso que el cuerpo entero. Se trata de un antecedente magistral de equilibrio de fuerzas que vio su esplendor con Newton. Una forma sencilla de entenderlo es poner el corcho de una botella de vino en el interior de un vaso de agua: se sumerge parcialmente.

En la proposición 6 se muestra que si introducimos a la fuerza un cuerpo en un líquido de densidad mayor, el cuerpo sufrirá un empuje hacia arriba que lo hará ascender y flotar, provocando que su peso se vea disminuido. En la proposición 7 se presenta la idea de que si introducimos un cuerpo en un líquido de menor densidad, caerá al fondo del recipiente contenedor, aunque su peso aparente disminuirá. En ambos casos, Arquímedes demuestra en cuánto disminuye el peso de los cuerpos: «en una cantidad que equivale al peso del líquido cuyo volumen coincide con el volumen del cuerpo sólido». Es decir, el conocido principio de Arquímedes.

LA LEY DE LA PALANCA

Un alto porcentaje de historiadores de la ciencia considera el tratado *Sobre el equilibrio de las figuras planas* de Arquímedes como el inicio de la física matemática. Sin lugar a dudas, no se

SENTADO EN EL AGUA

El Mar Muerto es un lago de unos 80 km de largo y con un máximo de 16 km de ancho, situado en la frontera entre Israel y Jordania. Su principal característica es que, debido a su salinidad, la densidad de sus aguas es muy superior a la del mar, llegando a 1 240 kg/m^3, característica que permite a cualquier ser humano flotar sin ninguna dificultad. Como se desprende de su nombre, ningún ser vivo habita en él, a excepción de las artemias, unos crustáceos cuya morfología apenas ha cambiado desde el período Triásico.



En el Mar Muerto, los bañistas flotan como boyas.

trata de ninguna exageración, a pesar de que se pueden encontrar antecedentes documentados sobre la palanca en filósofos de épocas precedentes. Aproximadamente un siglo antes, Aristóteles escribía sobre los elementos de la palanca y enunciaba la ley de la palanca de brazos iguales, pero al parecer no le dio la importancia suficiente, de manera que se ha pensado que algún copista podría haberlo incluido a posteriori en sus textos. Por otra parte, las interesantes contribuciones de Arquitas (430-360 a.C.), sin ánimos de desmerecerlas, deben tomarse como meras construcciones ex-

perimentales. Arquímedes no fue el primero en usar la palanca, pero sí nos ofrece el primer documento escrito que relaciona las matemáticas con la física.

Los relatos históricos del primer capítulo de la presente obra vienen a verificar que el uso de la palanca era habitual en la vida cotidiana de Arquímedes, ya sea en la construcción de elementos mecánicos para la defensa de Siracusa o en otro tipo de labores. El nivel de abstracción al que llegó no tiene antecedentes conocidos: eliminó todos los elementos dinámicos, consideró balanzas ideales y tomó en sus cálculos los cuerpos como objetos puntuales (hablaba de magnitud y de centro de gravedad como único aspecto físico del cuerpo). De este modo, a lo largo del tratado Arquímedes usa el concepto de balanza ideal, aunque no llegase a definirlo de ese modo. La etimología del propio término «balanza» ayuda a su definición, pues proviene de la fusión de las voces latinas *bis* (dos) y *lanx* (plato). De esta forma, una balanza no es más que una palanca de primer grado, cuyos brazos son iguales y que permite medir masas mediante el establecimiento del equilibrio.

LA TROMPETA BALANZA

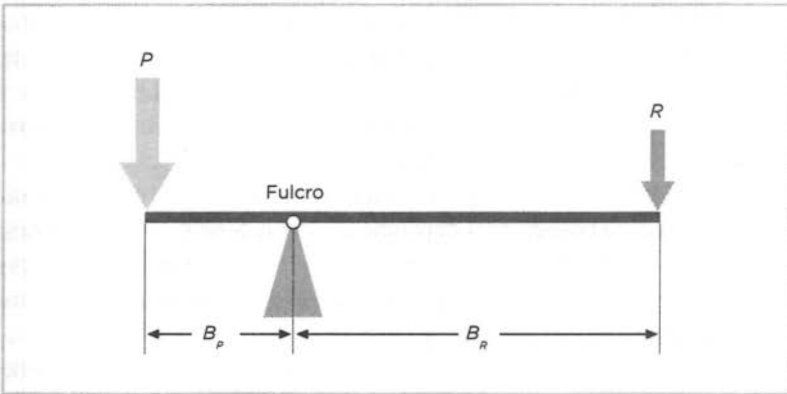
Una de las primeras referencias escritas a la ley de la palanca, aunque no desde el punto de vista científico, la encontramos en *La paz*, una comedia del dramaturgo griego Aristófanes (444-385 a.C.), estrenada en el año 421 a.C. En ella, el autor se mofa de varios personajes contemporáneos, entre ellos, Eurípides. El granjero Trigeo se burla del armero al decirle que use una trompeta a modo de balanza de brazos desiguales:

Trigeo: Ay, querido, lo siento; pero tu coraza me destroza las nalgas. Llévatela; no puedo comprártela.

El armero: ¿Y qué voy a hacer con esta trompeta, que me cuesta a mí sesenta dracmas?

Trigeo: Echa plomo en su cavidad; sujeta en lo alto una varilla algo larga, y tendrás un cótabo en equilibrio.

El armero: ¡Ay! Te burlas de mí.



Fulcro: es el punto de apoyo.
P: potencia. Es la fuerza aplicada, y puede ser un peso.
R: resistencia. Es la fuerza que se pretende vencer, y puede ser un peso.
B_P: brazo de potencia. Es la distancia entre el punto de aplicación de la fuerza ejercida y el punto de apoyo.
B_R: brazo de resistencia. Es la distancia entre el punto que realiza la resistencia y el punto de apoyo.

Una palanca simple (véase la figura) se compone de una barra rígida que puede girar libremente sobre un punto de apoyo o fulcro. En la barra se pueden diferenciar dos partes, el brazo de potencia (donde se realiza el esfuerzo) y el brazo de resistencia (el que recibe la fuerza). La utilidad consiste en poner masas o realizar esfuerzos en un lado de la palanca, por lo que pueden ocurrir dos cosas: o se consigue el equilibrio, o se desequilibra. La ley de la palanca establece la relación entre las fuerzas ejercidas en cada brazo y la distancia a la que se deben realizar para que se dé el equilibrio: la razón entre las fuerzas es igual a la razón entre las distancias desde el punto donde se ejerce la fuerza hasta el punto de apoyo. Esta relación fue una de las principales contribuciones de Arquímedes, la cual adquiere la siguiente formulación matemática:

$$P \cdot B_P = R \cdot B_R.$$

LAS TRES PALANCAS

En los cursos de la enseñanza primaria de cualquier país suelen estudiarse las tres especies de palancas. Puesto que una palanca tiene tres elementos distintos (potencia, fulcro y resistencia), tendremos tres formas de alinearlos, resultando así los tres tipos o

especies, de los cuales tenemos ejemplos en el cuerpo humano (figura 3). Arquímedes dejó escrita en sus tratados la ley de la palanca, aunque no clasifica los distintos tipos de palanca, puesto que podría resultar algo obvio. Sin embargo, no está de más recordar la clasificación.

En la palanca de primera especie (figura 4), el fulcro está situado entre la potencia y la resistencia. Realmente es la palanca que aparece en los textos de Arquímedes. Ejemplos de palanca de primera especie son la balanza, el balancín, las tenazas, los alicates y la catapulta.

En la palanca de segunda especie (figura 5), la resistencia se encuentra entre la potencia y el fulcro. Ejemplos de palanca de segunda especie son la carretilla de albañil, el cascanueces y el abrebotellas.

En la palanca de tercera especie (figura 6), la potencia está entre la resistencia y el fulcro. Ejemplos de palanca de tercera especie son el quitagrapas, la pinza de cejas y la grapadora.

«SOBRE EL EQUILIBRIO DE LAS FIGURAS PLANAS»

El tratado *Sobre el equilibrio de las figuras planas* presenta una anomalía con respecto a las obras matemáticas de la época: carece de definiciones. Esto ha dado lugar a teorizar que tal vez se trate de un resumen de una obra de mayor envergadura. Tal como ha llegado a nuestros días, el tratado se compone de dos libros.

El Libro I comienza con siete postulados (algunos autores afirman que en realidad son axiomas) y continúa con quince proposiciones, en las que se usa de modo implícito el equilibrio en una balanza de brazos iguales para mostrar distintas afirmaciones sobre el equilibrio de cuerpos. Las últimas proposiciones se dedican al cálculo de los centros de gravedad del triángulo, del paralelogramo y del trapecio.

El Libro II trata a lo largo de diez proposiciones el equilibrio de un segmento parabólico. Este segundo libro guarda una estrecha relación con su tratado sobre la parábola, así como con el método de investigación que utilizó Arquímedes.

FIG. 3

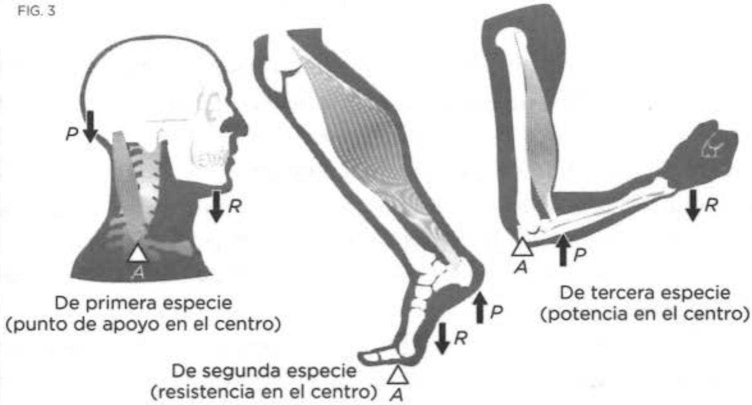


FIG. 4

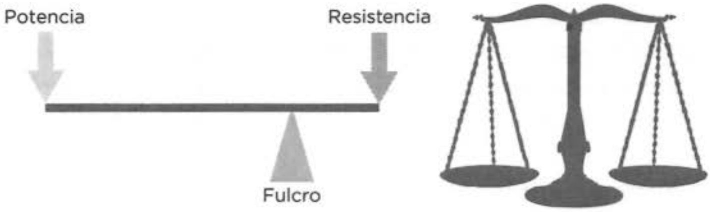


FIG. 5

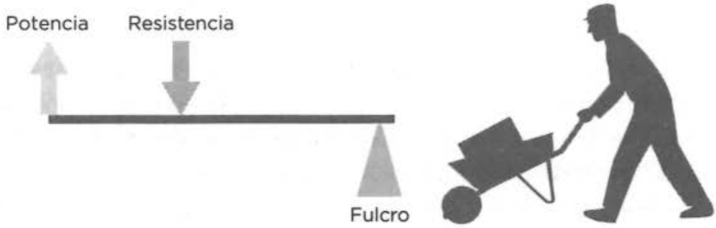
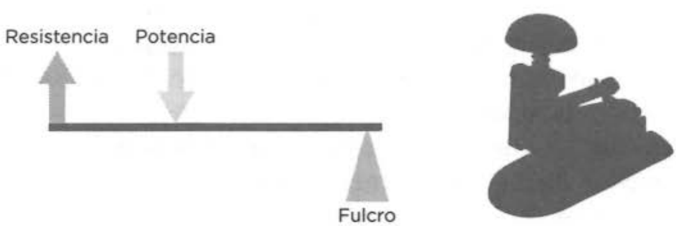


FIG. 6



«DADME UN PUNTO DE APOYO Y MOVERÉ EL MUNDO»

En el Libro VIII de *Sinagoga*, Papo habla de Arquímedes y de la palanca. Afirma que se comentaba que Arquímedes dijo la siguiente frase: «Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo». Mediante una simple cuenta, veremos que esa afirmación no es posible y es muy extraño que Arquímedes cayera en semejante error. Supongamos que usamos una palanca de primera especie y situamos la Tierra a 1 m del fulcro. El primer problema lo encontramos en que la Tierra no «pesa», en el sentido de que está en el espacio vacío, no está sobre ningún planeta. Pero, pongamos por caso que podemos realizar el experimento y colocamos la Tierra sobre una súper palanca que está en un súper planeta. En el caso de una Tierra puntual a 1 m del punto de apoyo, ¿a qué distancia debería Arquímedes realizar la fuerza en el otro brazo? Puesto que la Tierra tiene una masa aproximada de $6 \cdot 10^{24}$ kg y suponiendo que Arquímedes colocara una carga de potencia de 6 kg, la distancia a la que tendría que hacerlo sería:

$$P \cdot B_P = R \cdot B_R$$

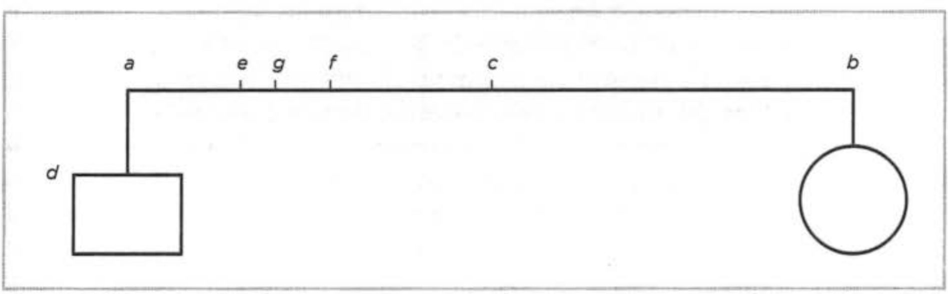
$$B_P = 1\ \text{m} \cdot \frac{6 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6\ \text{kg}} = 10^{24}\ \text{m}.$$

Si no se está acostumbrado a la notación científica, este resultado no sorprende, pero un sencillo cambio de unidades nos lleva a ¡10 millones de años luz! (10^{16}). El universo tiene una edad de 13 700 millones de años ($1{,}37 \cdot 10^{10}$); suponiendo un universo esférico, significaría que de punta a punta habría unos 27 400 millones de años luz. Para entender el resultado, dividamos el diámetro del universo entre el tamaño de la palanca: resulta que ¡podríamos atravesar el universo de punta a punta con apenas 2 740 de estas palancas! Además, como veremos, Arquímedes tenía una concepción del universo mucho menor que la que tenemos ahora, así que no tiene sentido que cometiese dicho error de cálculo. Si realmente dejó escrita alguna frase parecida en algún sitio, es evidente que solo lo expresó en sentido metafórico, para exagerar conscientemente el poder multiplicativo de la fuerza por medio de la palanca.

En 1586 Galileo Galilei (1564-1642) escribió un brevísimo ensayo llamado *La bilancetta*, en el que trató el relato de Vitruvio sobre la corona de oro del rey Hierón. Mostró cierto escepticismo acerca de la forma en que el arquitecto imaginó la resolución del problema, puesto que Galileo era un gran conocedor de la obra de Arquímedes y de su contexto científico. Por tanto, recuperó el análisis teórico de la balanza hidrostática y lo plasmó magistralmente en menos de cinco páginas, apoyado por el esquema reproducido en la figura. En el ensayo Galileo explica de algún modo que no tiene mucho sentido afirmar que Arquímedes realizara un experimento tan burdo desde el punto de vista científico, pues contaba con medios para realizar mediciones mucho más elegantes como para tener que rebosar agua de un recipiente. A continuación señala que lo que muestra está basado en las propias demostraciones de Arquímedes, aparecidas en los tratados sobre la flotabilidad y sobre el equilibrio, y cita la herramienta usada por Arquímedes, una balanza hidrostática, aunque con frecuencia se atribuye tal invención al propio Galileo. En el escrito incluso advierte de las dificultades en la precisión de la medida a nivel visual. Galileo, por tanto, llevó a cabo un trabajo de reconstrucción bibliográfica sencillamente magistral.

Hay que hacer notar que Galileo era un verdadero estudioso de todo el elenco científico conocido de Arquímedes y mostró un profundo respeto a su forma de trabajar y a sus resultados; lo cita en muchas de sus obras, por ejemplo, en *Diálogo sobre dos nuevas ciencias*, *Il Saggiatore* y *La bilancetta*, además de aparecer nom-

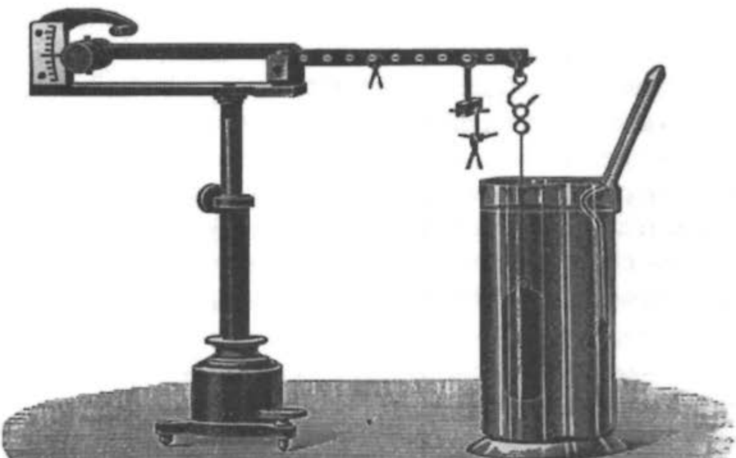
Con un sencillo dibujo muy esquemático Galileo consiguió explicar de manera viable el problema de la guirnalda. Este es el esquema que utiliza en su ensayo *La bilancetta* para tal efecto.



brado en algunas de sus cartas. Las investigaciones que llevó a cabo Galileo para el movimiento de los cuerpos se basaron en la hidrostática de Arquímedes. Así, el toscano imaginó movimientos en fluidos que cada vez ofrecían menos resistencia al paso de un cuerpo. De este modo, extrapoló su resultado y formuló las famosas ecuaciones de la cinemática en ausencia de aire, siendo consciente de que en su época no podría comprobarlas con fidelidad debido al rozamiento real con el aire en la caída de un cuerpo. Las

LA BALANZA DE MOHR-WESTPHAL

La balanza de Mohr-Westphal es una balanza de brazos desiguales que se utiliza para la determinación de densidades de líquidos. Su fundamento científico, puesto que se trata de una balanza hidrostática, es el principio de Arquímedes. Fue inventada por el farmacéutico alemán Karl Friedrich Mohr (1806-1879).



El brazo corto posee un contrapeso y del brazo largo pende un inmersor, que es donde se introduce el líquido cuya densidad desea determinarse de forma relativa al líquido en el que se sumerge.

ecuaciones de movimiento de Galileo sirven para conocer la posición y la velocidad de un cuerpo a lo largo de su movimiento en el vacío y pueden usarse con gran precisión en un campo gravitatorio, es decir, al dejar caer un cuerpo desde cierta altura. Sin embargo, el aire es un fluido y ofrece una resistencia a la caída, lo cual se traduce en que las ecuaciones de movimiento no son válidas. En 1971, el astronauta del Apolo 15 David Scott dejó caer una pluma y un martillo sobre la superficie lunar, para comprobar que ambos llegaban a la par al suelo, dada la ausencia de atmósfera en nuestro satélite y, por ende, la carencia de rozamiento, pudiéndose así cumplir las ecuaciones de movimiento de Galileo. «Lo que demuestra que las ideas del Sr. Galileo eran correctas», comentó Scott al finalizar el famoso experimento, como homenaje al toscano y de forma implícita a su maestro Arquímedes.

«EL CONTADOR DE ARENA»

La única obra de divulgación científica conocida de Arquímedes es *El contador de arena*, citada habitualmente como *El Arenario* (*Psammites*, en griego). El comienzo del tratado se abre con una dedicatoria a Gelón de Siracusa, hijo de Hierón II, a quien acompañó en la corregencia. Incluso siendo consciente de la dificultad que pueda entrañar un texto de contenido científico, le anima diciendo: «Pero yo intentaré hacerte ver, mediante demostraciones geométricas que podrás comprender [...]». Tras un largo ir y venir de números enormes, cierra la disertación recordándole a las personas poco familiarizadas con las matemáticas que podrían estar interesadas en el asunto y acaba despidiéndose de Gelón: «Pensé que tampoco a ti dejaría de convenirte conocer estos resultados». Algunos expertos han considerado que el texto fue de poco interés para los hombres de la época e inmediatamente posteriores, pues conserva casi intacto el dialecto de Siracusa. A pesar de ello, la existencia de este texto nos presenta a un Arquímedes más cercano a la realidad, interesado por la divulgación científica y por la popularización del conocimiento.

En el tratado se cuestiona cuántos granos de arena cabrían en Siracusa: ¿serían infinitos? La respuesta del texto es no. Luego cuántos cabrían en Sicilia, en la Tierra, cuántos harían falta para colmar todas las montañas terrestres... Y así hasta plantearse el número de granos de arena que cabrían en el mundo entero. Arquímedes quiso mostrarle a Gelón que ese número no es infinito.

«Es evidente por tanto que la cantidad de granos de arena que ocupa una magnitud igual a la esfera de los astros fijos que Aristarco supone como hipótesis es inferior a 1 000 miríadas de números octavos.»

— Arquímedes en referencia a la cantidad de granos de arena necesarios para cubrir el mundo, tal y como él lo concebía.

En su época no existía un nombre para los números que designaran cantidades tan grandes como las que aparecen en el ensayo; por tanto, Arquímedes se atrevió a revisar el sistema de numeración, proponiendo modificaciones para poder trabajar con ese tipo de cifras. La principal limitación de la numeración griega era que se usaba el mismo alfabeto que para las palabras, lo cual convertía un cálculo con números grandes en un galimatías. Conceptualmente hablando, en el tratado Arquímedes establece un acercamiento a nuestro actual sistema de notación científica, que nos permite escribir cantidades tan grandes como deseemos. *El Arenario* no debe tomarse como un simple divertimento matemático en el que Arquímedes se jacta de poder escribir el número que quiera, sino que en él se hace un repaso de la astronomía griega e, incluso, hace la única referencia a su padre, el astrónomo Fidias, como veremos a continuación.

Arquímedes comienza *El Arenario* demarcando qué se entiende por «mundo», y para ello dice que la mayoría de los astrónomos defienden que el mundo es la esfera que tiene por centro la Tierra y por radio la recta que une los centros de la Tierra y el Sol. Pero no deja de lado la hipótesis heliocéntrica de Aristarco de Samos (310-230 a.C.); de hecho, un dato importante a señalar es que se trata de la única mención que se tiene del astrónomo en toda la

literatura griega antigua. Lo interesante en este punto es que Arquímedes rechaza la idea de que el Sol esté en el centro, no por motivos de imposibilidad de una Tierra en movimiento, como ocurriría más adelante, sino por la incoherencia detectada en una frase:

> [...] [Aristarco de Samos] supone que los astros fijos y el Sol permanecen inmóviles, y que la Tierra se desplaza según una circunferencia de círculo en torno al Sol, el cual está situado en el centro de su curso, y que la esfera de los astros fijos, situada en torno al mismo centro que el Sol, es de un tamaño tal que el círculo según el cual supone que se desplaza la Tierra guarda con la distancia de los astros fijos una razón como la que guarda el centro de la esfera con su superficie. Es más que evidente que esto es imposible: puesto que el centro de la esfera no tiene ningún tamaño tampoco cabe aceptar que guarde ninguna razón con la superficie de la esfera.

A pesar de que Arquímedes advierte con acierto la incoherencia de comparar un punto con una superficie, incurre en un argumento *ad logicam*, es decir, en una falacia, puesto que el hecho de que la frase sea incorrecta no significa que el argumento de Aristarco sea erróneo. En cualquier caso, pone a Gelón en aviso de que los números a los que dará nombre incluso exceden el número de granos de arena que cabrían en el mundo entero. A continuación supone un perímetro terrestre de 300 miríadas de estadio y recuerda que el diámetro de la Tierra es mayor que el de la Luna pero menor que el del Sol. Una miríada equivale al número 10 000. Sin embargo, la equivalencia del estadio con las unidades del Sistema Internacional plantea un problema: en la Antigüedad variaba de unos lugares a otros. En cualquier caso, aquí no importa la precisión en las medidas de la Tierra, solo el uso de los números que indican cantidades grandes. Seguidamente especula acerca de las proporciones de los diámetros del Sol, la Tierra y la Luna. Es en ese punto cuando habla de su padre:

> Después de esto, que el diámetro del Sol es treinta veces mayor que el diámetro de la Luna y no más, aunque entre los astrónomos anteriores Eudoxo hizo ver que era nueve veces mayor; Fidias, mi padre,

que dos veces, y Aristarco intentó demostrar que el diámetro del Sol era más de dieciocho veces mayor que el de la Luna, pero menor que veinte veces más.

Aunque es destacable notar cómo el asunto de los tamaños de los cuerpos celestes era un tema de interés entre los astrónomos, Arquímedes prefiere hacer un inciso para detallar cómo construir, con materiales caseros, una dioptra, instrumento utilizado por los astrónomos griegos para medir la posición de los astros. Luego termina de establecer sus hipótesis sobre los tamaños para dar paso a su innovador sistema de numeración. Respecto a esto último, parece ser que no ha llegado hasta nosotros una obra de la que habla en el texto:

> Pero supongo que también es útil que hable sobre la denominación de los números —entre otras cosas, para que no se pierdan los que no han tenido acceso al libro que dediqué a Zeuxipo por no haberse dicho de antemano en este libro nada sobre esa cuestión—. Ocurre, en efecto, que los nombres de los números que nos han sido transmitidos llegan hasta las miríadas y por encima de las miríadas. Llámense pues primeros a los números indicados hasta la miríada de miríada.

De este modo Arquímedes va introduciendo órdenes de magnitud cada vez mayores haciendo notar que así se puede escribir el número que se desee. Una vez establecido su sistema de numeración, realiza una serie de cálculos estimativos; entre ellos, argumenta que en una semilla de amapola cabrían 10 000 granos de arena. Finalmente, llega a una cifra para los granos de arena que cubrirían el mundo, su visión del mundo, que en nuestra numeración sería 10^{63}, esto es, un uno seguido de sesenta y tres ceros.

LAS OCTADAS DE ARQUÍMEDES

El sistema de numeración propuesto por Arquímedes en *El Arenario* es conocido como el «sistema de octadas» y tenía un gran potencial, aunque fue desatendido por muchos matemáticos.

Hasta su época se usaban los siguientes términos: unidad, decena, centena, millar y miríada. Su propuesta fue ir más allá del diez mil. Para ello empezó a contar unidades de miríadas, decenas de miríadas, millares de miríadas y miríadas de miríadas. Una vez terminado el recuento, consiguió tener ocho cantidades con números, las anteriores y los múltiplos de ellos:

Arquímedes	**Notación científica**	**Notación actual**
Una unidad	$1 = 10^0$	Uno
Una decena	$10 = 10^1$	Diez
Una centena	$100 = 10^2$	Cien
Un millar	$1000 = 10^3$	Mil
Una miríada (una unidad de miríada)	$10000 = 10^4$	Diez mil
Una decena de miríadas	$10 \cdot 10000 = 10^5$	Cien mil
Una centena de miríadas	$100 \cdot 10000 = 10^6$	Un millón
Un millar de miríadas	$1000 \cdot 10000 = 10^7$	Diez millones
Una miríada de miríada	$10000 \cdot 10000 = 10^8$	Cien millones

Estamos por tanto ante un sistema de base 10^8, de ahí el nombre de octada. Cada vez que realiza un ciclo pasa de un tipo de número a otro; así tomó los siguientes nombres:

Desde 1 a 10^8 (excluido)	Números primeros. El 1 es la primera unidad de los números primeros.
Desde 10^8 a 10^{16} (excluido)	Números segundos. El 10^8 es la primera unidad de los números segundos.
Desde 10^{16} a 10^{24} (excluido)	Números terceros. El 10^{16} es la primera unidad de los números terceros.
Etc.	

De esta manera, pudo llegar hasta 10^8 veces 10^8, es decir, hasta $(10^8)^{(10^8)}$, lo cual constituye los números de lo que llamó el primer período. Este recuento se puede extender a números del segundo período, tercer período, etc. El número máximo que Arquímedes nombra es el del período de miríadas de miríadas, es decir,

$$\left(\left(10^8\right)^{\left(10^8\right)}\right)^{\left(10^8\right)} = 10^{\left(8 \cdot 10^{16}\right)},$$

o lo que es lo mismo, un uno seguido de ochenta mil billones de ceros ($80\,000 \cdot 10^{12}$)... Una cifra realmente grande.

Concluyendo, en *El Arenario* Arquímedes llega a la afirmación de que en el mundo caben 1 000 miríadas de números octavos (10^{56}). Es decir, el número de granos de arena que cabe en el mundo es $10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{56} = 10^{63}$.

Hoy en día este tipo de órdenes de magnitud son habituales en algunos campos del conocimiento y la tecnología. Por ejemplo, en el universo hay la friolera de 10^{82} protones, y más grande que esta cifra es el gúgol, es decir, 10^{100} (un uno seguido de cien ceros). El término *gúgol* fue creado en 1938 por Milton Sirotta, un niño de nueve años sobrino del matemático estodounidense Edward Kasner. Una curiosidad es que el motor de búsqueda Google recibe este nombre por su semejanza con el término en inglés, que se escribe *googol*. De hecho, la sede de Google en California recibe el nombre de Googleplex, lo cual recuerda a un gúgolplex, término acuñado por Kasner y que viene a ser $10^{\text{gúgol}}$, es decir, $10^{10^{100}}$ (10 elevado a un uno con cien ceros detrás).

CAPÍTULO 3

El defensor del círculo

La época de Arquímedes fue un hervidero de estudios y descubrimientos matemáticos. Muchos fueron los talentos dedicados a esa materia; sin embargo, el sabio griego destacó al introducir nuevos métodos de estudio y analizar los resultados ya conocidos mediante una visión personal. Ha pasado a la historia por su aproximación al número π y por sus exhaustivos estudios sobre los volúmenes y las áreas de las figuras más comunes.

A pesar de que en general la figura de Arquímedes se conoce a nivel popular por sus aportaciones a la física, el grueso de su obra científica trata temas eminentemente matemáticos. Incluso llegó a pedir que se esculpiera en su tumba uno de sus resultados geométricos, estudió la mayoría de los temas recurrentes del pensamiento griego y ofreció nuevas demostraciones y enfoques. Llevó el método exhaustivo y la reducción al absurdo a límites desconocidos, rozó el cálculo infinitesimal e integral y consiguió utilizar sus descubrimientos sobre la palanca para encontrar nuevos resultados matemáticos. En este capítulo nos acercaremos a algunos de los resultados matemáticos más importantes que aparecen en su obra, empezando por los métodos que usaba el científico en sus investigaciones y continuando con el análisis de casos concretos elegidos atendiendo a criterios de relevancia y accesibilidad.

LOS MÉTODOS DE ARQUÍMEDES

El éxito de las investigaciones llevadas a cabo por Arquímedes se basa casi por completo en los métodos utilizados por este. Se apoyó fundamentalmente en dos: uno enfocado a descubrir la

solución que le interesaba (método mecánico), y otro, una vez hallado el resultado, encaminado a demostrar que la solución era la correcta (método geométrico de exhaución). En el trabajo de Arquímedes hay citas y referencias a los textos de Euclides y otros matemáticos anteriores, es decir, muchos resultados los da por superados y los usa tal cual en sus escritos, como conocimientos asimilados. Por tanto, estamos ante un matemático que trabajó con fuentes fidedignas y que supo extraer de ellas los contenidos necesarios para sus investigaciones. En la actualidad usamos el lenguaje algebraico para realizar todo tipo de demostraciones (fórmulas con letras, números y símbolos matemáticos), pero en la época que nos ocupa tal nomenclatura aún no existía. Esto hace que sus textos sean de difícil seguimiento para un lector contemporáneo, puesto que todos los razonamientos se basan en procedimientos meramente geométricos. A continuación se presentan algunos descubrimientos matemáticos de Arquímedes y se desvela en la medida de lo posible su proceso mental, aunque en ocasiones se ha tenido que recurrir al lenguaje algebraico.

«EL MÉTODO SOBRE LOS TEOREMAS MECÁNICOS»

En el libro *El método sobre los teoremas mecánicos* puede apreciarse cómo Arquímedes compartió sus métodos de trabajo con la comunidad científica de la época, como ya se ha apuntado al hablar del palimpsesto de Constantinopla. En concreto, envió la obra a Eratóstenes, pensando que así caería en buenas manos y podría ser usada para descubrir nuevos resultados interesantes.

A pesar de que Herón cita la obra en *Métrica*, muchas fuentes a lo largo de la historia dibujaron la figura de Arquímedes como un investigador celoso de su trabajo y reacio a compartir y divulgar sus métodos. Por fortuna, en 1906 el helenista Heiberg recuperaría *El Método* y otras obras con el hallazgo del célebre palimpsesto. Efectivamente, Arquímedes estaba dispuesto a compartir tanto sus descubrimientos como la forma en que había llegado a ellos, e incluso alentó a Eratóstenes a que usara su método

mecánico, informándole de que le «será posible disponer de recursos para poder investigar algunos asuntos matemáticos por medio de la mecánica».

«[...] al redactar el método he pretendido sacarlo a la luz a la vez porque previamente había hablado en favor de él —no fuera que le pareciera a algunos que había estado hablando palabras vanas— y al mismo tiempo porque estaba convencido de que arrojaría no pequeña utilidad para la matemática.»

— Extracto de la carta de Arquímedes a Eratóstenes en *El Método*.

Por consiguiente, en esta obra Arquímedes presenta los pormenores de su propio método, el método mecánico, y cómo lo había usado en las investigaciones previas que ya había publicado en otros tratados, ofreciendo ejemplos de aplicación. No obstante, el tratado, además del método mecánico, de autoría propia, incluye el método geométrico (el de exhaución), que atribuye a Eudoxo. El método mecánico solo es usado con el fin de realizar un acercamiento a la solución, de modo que considera de mayor rigor y validez cualquier demostración mediante métodos geométricos:

> [...] algunas de las cosas que primero se me mostraron por medio de la mecánica luego las demostré por medio de la geometría, [...] pues es más fácil avanzar en la demostración tras haber alcanzado por anticipado cierto conocimiento de las cuestiones gracias a este método que hacer la investigación sin conocer nada.

Tras la carta enviada a Eratóstenes, el tratado se abre con un conjunto de once lemas a modo de definiciones previas sobre centros de gravedad. En este punto es importante resaltar que da por supuesto algunos resultados relacionados con su trabajo *Sobre el equilibrio de las figuras planas*. El tratado no nos ha llegado completo; se conservan dieciséis proposiciones y con algunas enmiendas importantes. En las once primeras ofrece el método mecánico en sí, mientras que en las siguientes desarrolla todo el procedi-

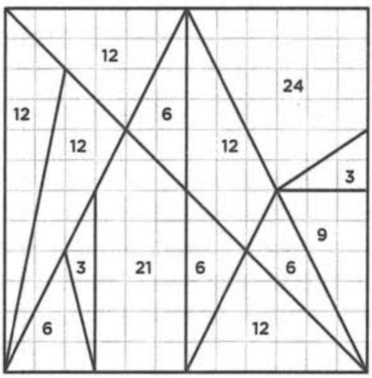
miento, es decir, añade la posterior demostración mediante el citado método exhaustivo. Trata una gran cantidad de temas que ya había estudiado en otras obras, como por ejemplo el asunto de la cuadratura del segmento parabólico, aparecido en *Sobre la cuadratura de la parábola*. La primera de las proposiciones del tratado, ejemplificada en la figura de la página siguiente, es:

> Sea el segmento *ABC* comprendido entre la recta *AC* y la sección de parábola *ABC*; córtese *ABC* por la mitad en el punto *D* y trácese la recta *DBE* paralela al eje de la parábola y trácense *AB* y *BC*. Digo que el segmento *ABC* es cuatro tercios del triángulo *ABC*. (*El método sobre los teoremas mecánicos*, proposición 1.)

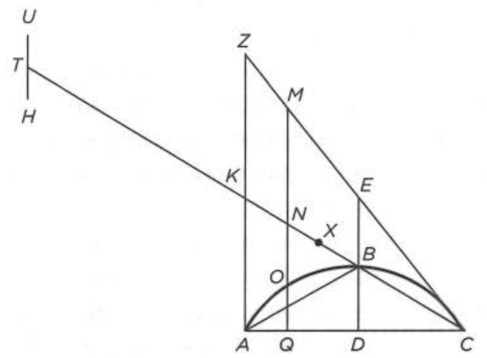
EL «STOMACHION»

Con el pequeño tratado *Stomachion* ha ocurrido algo similar a lo que sucedió con *El Método*: a lo largo de la historia han sido varias las referencias que han señalado su existencia, pero permaneció perdido hasta 1906, año del descubrimiento del palimpsesto de Constantinopla. Así, Ausonio y Mario Victorino hablan en el siglo IV de un *Loculus Archimedium* («caja de Arquímedes») compuesto de catorce láminas de marfil incluidas en una forma cuadrada. Lo que se conserva del tratado no es más que la descripción para realizar las catorce divisiones pertinentes del cuadrado (figura 1). Ofrece a su vez las proporciones entre las áreas ocupadas por las piezas y el cuadrado completo. No está claro cuál es el objetivo del *Stomachion*; si bien algunos han querido ver en él un temprano estudio combinatorio,

FIG. 1



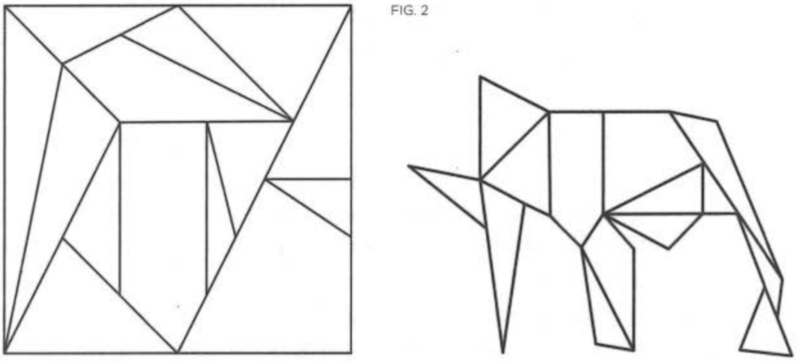
Si representamos las piezas del *Stomachion* sobre un cuadrado de 12 unidades de lado, el área de cada una de las piezas es la representada en la imagen. Una manera fácil de representar las piezas es emplear un papel cuadriculado. Los números en la figura indicann las áreas.



Adaptación de la construcción geométrica realizada por Arquímedes para descubrir la relación entre las áreas de la parábola y el triángulo. La base del razonamiento está en el estudio mecánico, es decir, en buscar la forma de equilibrar segmentos.

otros tan solo han advertido una actividad recreativa a modo de puzle o *tangram*. Hasta el año 2003 no se pudo hacer un riguroso análisis combinatorio, el cual demostraría que hay 17152 formas posibles de combinar las piezas del *Stomachion* dentro del cuadrado, que se reducen a 536 si se obvian construcciones similares por rotación o reflexión (figura 2).

FIG. 2



No solo es posible construir el cuadrado reorganizando las piezas, sino que también se pueden formar divertidas figuras, como el famoso elefante.

MATEMÁTICO HASTA EL AGOTAMIENTO: EL MÉTODO DE EXHAUCIÓN

En las matemáticas griegas ocurrió una sonada crisis debida a los llamados números inconmensurables, aquellos que no pueden expresarse como la razón de otros dos números enteros. En la actualidad a esos números los llamamos números irracionales, como por ejemplo, el número π. Esta circunstancia se traduce en una dificultad a la hora de comparar figuras curvilíneas y rectilíneas; es decir, los griegos incurrían en un importante problema cuando querían calcular el área de círculos y otras superficies encerradas por líneas curvas, además de ciertas magnitudes como, por ejemplo, la diagonal de un cuadrado. Este problema se simplificó gracias al método de exhaución, el cual puede considerarse como un antecedente del moderno cálculo infinitesimal y del concepto de límite. Aunque Euclides lo usó en algunas demostraciones de sus *Elementos*, fue Arquímedes quien lo supo explotar a lo largo de toda su vida como matemático. Él mismo asignó este método a Eudoxo, en el preámbulo de su tratado *El método sobre los teoremas mecánicos*.

> «Es imposible encontrar en toda la geometría cuestiones más difíciles y más importantes explicadas con términos más sencillos ni más comprensibles que los teoremas de inteligencia sobrehumana de Arquímedes.»
>
> — Plutarco.

El método de exhaución también suele conocerse como «método de exhaustación», «método exhaustivo» o «método por agotamiento». Con él se persigue calcular el área de una superficie descomponiéndola en trozos cada vez más pequeños (figuras poligonales) y sumando a continuación esos trozos. Se realiza esta fragmentación hasta «agotar» la superficie, aunque en realidad nunca se consigue cubrirla en su totalidad. En este sentido, la expresión «método por agotamiento» la acuñó el matemático belga Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), y su uso se ha extendido irreversiblemente.

La idea original se extiende si además de circunscribir la figura curvilínea con un polígono, hacemos lo propio pero inscribiéndola. Es decir, la figura curvilínea se va acorralando desde dentro y desde fuera: se aumenta el número de lados de un polígono inscrito y, asimismo, se aumenta el número de lados de un polígono circunscrito a la superficie curvilínea. Por tanto, el método de exhaución se generaliza o puede dividirse en dos procedimientos:

— Agotamiento: se inscribe una figura poligonal en la superficie curvilínea hasta casi agotarla, o sea, hasta minimizar la superficie no cubierta.

— Compresión: se circunscribe una figura poligonal a la superficie curvilínea hasta minimizar el espacio excedido.

Realmente es posible encontrar un polígono tan cercano a la superficie curva como se desee. Este resultado recibe el nombre de «axioma de Arquímedes» (aunque ya estaba incluido de algún modo en los *Elementos* euclídeos) y en términos modernos viene a decir que si se toma una recta o magnitud cualquiera y se le quita un trozo mayor que su mitad, al resto se le quita a su vez un trozo mayor que su mitad y se procede así reiteradamente, se puede llegar a un trozo de recta tan pequeño como sea preciso.

El gran paso conceptual con el uso del axioma de Arquímedes está en la idea de «aproximación». Los matemáticos griegos buscaban respuestas exactas y absolutas, por lo que sus procedimientos se encaminaban a ello. Con el axioma de Arquímedes cualquier persona que investigue, por ejemplo, un área, puede acercarse a su valor tanto como desee, aunque no la calcule de manera exacta. Lógicamente, una vez este acercamiento sea el suficiente, puede postularse un valor exacto. Arquímedes tenía verdadero aprecio a este método de trabajo, puesto que conducía a una verdadera demostración geométrica: una vez encerrada la superficie curva, se procede mediante una doble reducción al absurdo para comprobar el valor de su área que se ha postulado a priori con el método de exhaución. Los pasos lógicos son:

— Sea S el área a calcular de la superficie curva.

— Se propone (puede ser por ensayo y error) un valor T para el área de la curva.

— Hay que demostrar que $S = T$.

— Primero se prueba que no puede ser $S < T$.

— Luego se prueba que no puede ser $S > T$.

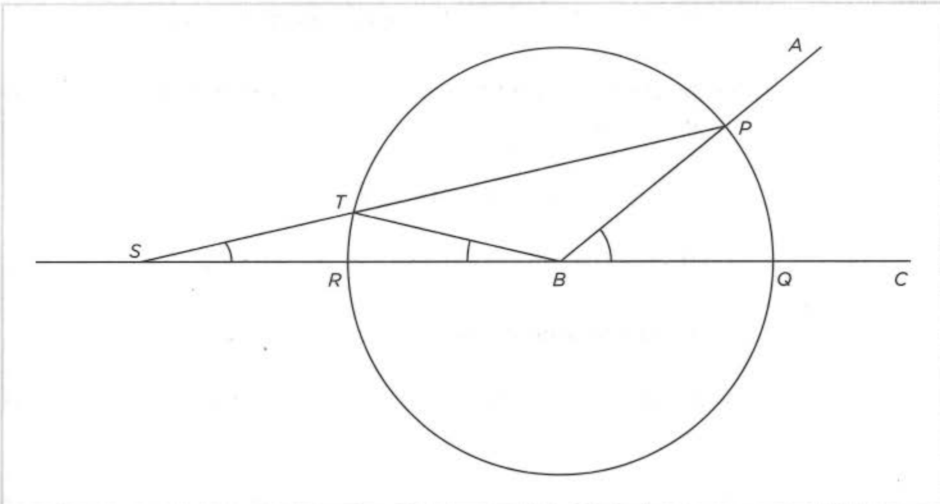
— Como S no puede ser ni mayor ni menor que T, entonces $S = T$.

Arquímedes usó este método en la mayoría de sus tratados y mostró un rigor sin precedentes en la historia de las matemáticas. En las siguientes páginas se proponen algunos ejemplos del uso del método de exhaución que servirán para una mejor comprensión.

NEUSIS

La neusis, que podría traducirse del término griego homólogo como «inclinación», es una técnica de construcción geométrica consistente en colocar entre dos líneas un segmento de longitud conocida haciendo que pase por un punto fijo dado. Se trata de una construcción manual, en el sentido de que se marcan los extremos sobre una regla y se desplaza esta convenientemente para que coincida con las líneas correspondientes. Con desenfado, podría decirse que es una «cuenta de la vieja» geométrica.

Bajo el idealismo platónico en el que se encontraban las matemáticas griegas en el contexto histórico de Arquímedes, las demostraciones en materia matemática seguían, según los expertos, una jerarquía, unas preferencias de estilo y elegancia. Si algo podía demostrarse con regla y compás, así debía hacerse. En el caso de que fuera inviable, se pasaba al segundo nivel, es decir, debía echarse mano de las secciones cónicas. Solamente en ocasiones en las que



Construcción de la trisección de un ángulo con el método neusis.

no quedara más remedio era recomendable usar el método neusis. Arquímedes acudió a la neusis en algunos de sus pasajes, por ejemplo, en las proposiciones 5 a 9 de *Sobre las espirales*, aunque nos detendremos en la trisección del ángulo (véase la figura) aparecida en la proposición 8 de *El libro de los lemas*:

— Sea *ABC* el ángulo que se desea trisecar.

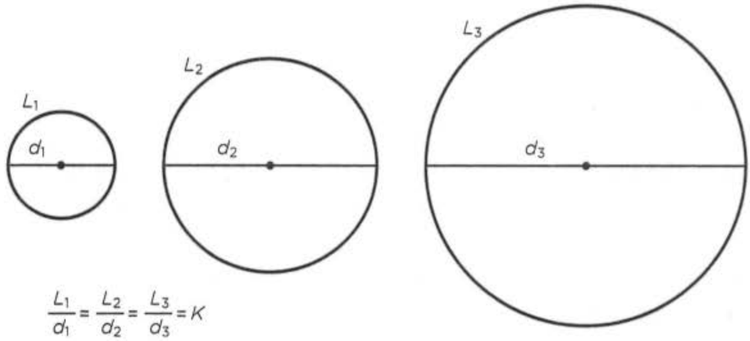
— Se traza, con centro en *B*, una circunferencia de radio arbitrario. Se obtienen los puntos de corte *P* (en *AB*), *Q* (en *BC*) y *R* (prolongación de *BC*).

— Se dibuja la recta *STP* de forma que *S* esté en la línea *CQBR*, *T* en la circunferencia y con las condiciones *ST*=*BQ*=*BP*=*BT* (esta es la aplicación de la construcción neusis, es decir, con una regla marcada).

— Puesto que *STB* y *TBP* son isósceles, a partir de este hecho puede demostrarse, aunque no tiene cabida aquí, que el ángulo *BST* es un tercio del ángulo *QBP*, consiguiéndose así la trisección.

EL ESQUIVO NÚMERO π

Desde el comienzo del pensamiento filosófico y matemático al ser humano le resultó fácil advertir que las circunferencias cumplían una propiedad interesante: parece como si todas las circunferencias fueran la misma pero en distintas versiones, ampliadas o reducidas. En seguida se supo que existía una relación de proporcionalidad entre el perímetro de la circunferencia y el diámetro de la misma. Es decir, al dividir el perímetro de una circunferencia entre su diámetro siempre debe resultar el mismo número, una constante k determinada. Pero ¿cuál es ese número? Eso es algo que no solo preocupó a los matemáticos griegos, sino también a los de culturas anteriores y posteriores.



$$\frac{L_1}{d_1} = \frac{L_2}{d_2} = \frac{L_3}{d_3} = K$$

Todas las circunferencias cumplen la misma relación de proporcionalidad (k) al dividir su perímetro por su diámetro.

La búsqueda de esta razón ha dado lugar a siglos de investigación y mares de tinta. Los matemáticos de las primeras culturas buscaron una razón entre dos números enteros y así se sucedieron diferentes aproximaciones para relacionar el perímetro y el diámetro de la circunferencia. Pero no sería hasta el siglo XIX cuando se supo realmente que la razón buscada era un número irracional, por eso su búsqueda había sido tan infructuosa. En la actualidad sabemos que esta razón recibe el nombre de número π:

$$\frac{\text{Longitud del perímetro}}{\text{Diámetro}} = \pi$$

La aproximación de Arquímedes es tan buena que no solo se usó durante siglos, sino que hoy en día se toma prestada en multitud de contextos. De esta forma, es habitual calcular la longitud de una circunferencia con la expresión: $L = 3{,}14d$.

EN BÚSQUEDA DEL NÚMERO π

En *Sobre la medida del círculo* queda reflejado que Arquímedes buscaba una relación de proporcionalidad entre la longitud de una circunferencia (L) y el diámetro (d) de la misma. En la proposición 3 del tratado se deduce que la longitud de la circunferencia es aproximadamente 3,14 veces la longitud del diámetro, es decir, $L \simeq 3{,}14d$.

Si recordamos la expresión que seguramente muchos hemos aprendido en la escuela ($L = \pi d$), lo que observamos es que Arquímedes encontró un valor aproximado de dos decimales para el número π, es decir, $\pi \simeq 3{,}14$. Esta aproximación se usaría durante toda la Edad Media y aún la usamos en la actualidad en algunas ocasiones, aunque sabemos que π es un número irracional con infinitos decimales.

La técnica empleada por Arquímedes para encontrar la relación existente entre la longitud y el diámetro de la circunferencia fue, literalmente, acorralar la circunferencia, usando el método de exhaución que se ha introducido con anterioridad. Para ello, tomó una circunferencia y dentro de ella inscribió un hexágono. Desde el perímetro del hexágono al perímetro del círculo existe una superficie sin cubrir por dicho hexágono. A continuación, circunscribió otro hexágono (por fuera) a la circunferencia. Desde el perímetro del círculo hasta el perímetro del hexágono hay una superficie extra. Lógicamente, la longitud (perímetro) de la circunferencia será mayor que el perímetro del hexágono pequeño, pero menor que el perímetro del grande.

El proceso mental es análogo si usamos el concepto de área, que todavía resulta mucho más visual. El objetivo en este caso será calcular el área del círculo encerrada en la circunferencia anterior. Sabemos que esta área se calcula con la expresión: $A = \pi r^2$. Obsérvese que en el caso de que el radio sea la unidad ($r = 1$), el área será $A = \pi = 3{,}14159... \simeq 3{,}14$. Es decir, si calculamos el área de una circunferencia de radio 1, se obtendrá el número π. Arquímedes proponía construir un círculo y a partir de él inscribir y circunscribir un polígono regular, en concreto, un hexágono.

FIG. 1

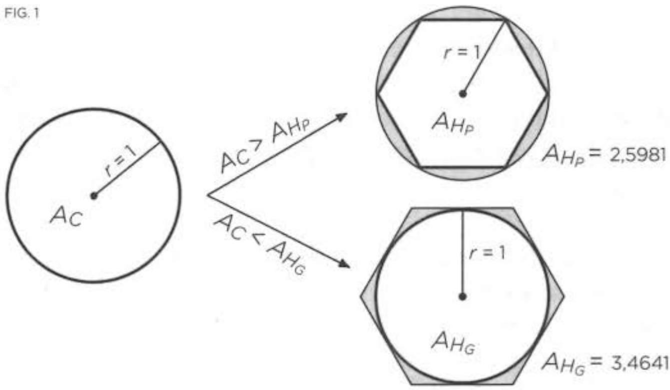


FIG. 2



Es decir, el área A_c del círculo será mayor que el área A_{Hp} del hexágono pequeño y a su vez menor que el área A_{Hg} del hexágono grande (véanse secciones sombreadas en la figura 1). Con este método no se conoce con exactitud el valor del área, pero al menos se puede saber entre qué valores está: $2{,}5981 < A_c < 3{,}4641$, o sea, es mayor que el área del hexágono pequeño (2,5981) y menor que el área del hexágono grande (3,4641). La siguiente genialidad de Arquímedes fue duplicar el polígono, pasando a un

dodecágono (figura 2). De esta manera, el valor del área del círculo está encerrado entre dos valores más cercanos, y se afina más el cálculo, puesto que los valores de las áreas de los dos polígonos se parecerán más. Arquímedes siguió duplicando polígonos hasta llegar a uno de nada menos que ¡96 lados! Esto le permitió demostrar que el valor del área del círculo está comprendido entre $3+10/71$ y $3+1/7$:

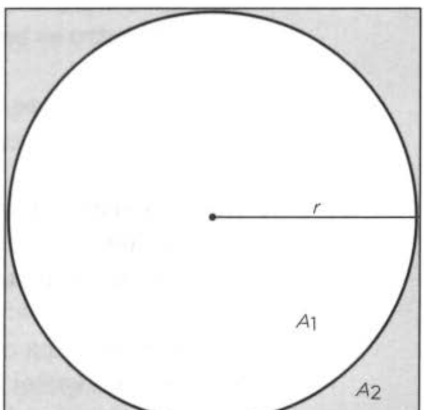
> La longitud del círculo es el triple del diámetro y lo excede en menos de 1/7 pero en más de 10/71. (*Sobre la medida del círculo*, proposición 3):

$$3+\frac{10}{71}<A_c<3+\frac{1}{7},\text{ es decir, } 3{,}1408<A_c<3{,}14286.$$

Por tanto, el área de un círculo de radio la unidad es de 3,14 unidades de superficie, con una precisión de dos decimales, tal como vimos antes. Además, como Euclides había demostrado que el área de un círculo era proporcional al cuadrado de su diámetro, se deduce la aproximación: $A \simeq 3{,}14\,r^2$. Es importante señalar que Arquímedes sabía que este no era el valor real, pues al acotar el área entre dos valores era consciente de que estaba llevando a cabo una aproximación.

LA CIRCUNFERENCIA ENMARCADA

Otra demostración interesante que aparece en el tratado *Sobre la medida del círculo* es que la razón entre el área de una circunferencia y el área del cuadrado circunscrito en ella es 11/14. En este contexto, de nuevo se obtiene para π el valor aproximado de 3,14. Estudiemos a continuación la validez de esta demostración. En primer lugar, fijémonos en la construcción geométrica de la figura de la derecha.



El área del círculo es: $A_{\text{círculo}} = \pi r^2$.

El área del cuadrado es: $A_{\text{cuadrado}} = (2r)^2 = 4r^2$.

La razón de uno a otro es: $\frac{\text{Área círculo}}{\text{Área cuadrado}} = \frac{\pi r^2}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$.

Lo que obtuvo Arquímedes fue: $\frac{\text{Área círculo}}{\text{Área cuadrado}} = \frac{11}{14}$.

Es evidente que ambos valores deben coincidir, y, recordando que los razonamientos de Arquímedes son aproximados:

$$\frac{\pi}{4} \simeq \frac{11}{14} \quad \rightarrow \quad \pi \simeq 3{,}14.$$

EN EL ABSURDO ESTÁ LA RESPUESTA

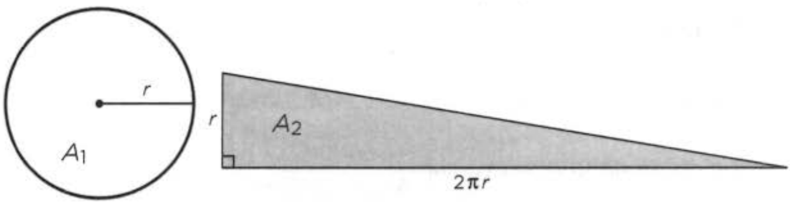
Como ya se ha dicho, Arquímedes usó la reducción al absurdo en muchas de sus demostraciones. La primera de las proposiciones de *Sobre la medida del círculo* dice:

> Todo círculo es igual a un triángulo rectángulo cuyo radio es igual a uno de los lados que forman el ángulo recto y el perímetro es igual a la base.

Debe entenderse que aquí se habla de áreas. Para la demostración (véase la figura) procedió del siguiente modo:

— Supongamos que el área del círculo es mayor que el área del triángulo: $A_{\text{círculo}} > A_{\text{triángulo}}$. Arquímedes demostró que esta desigualdad es imposible.

— Supongamos que el área del círculo es menor que el área del triángulo: $A_{\text{círculo}} < A_{\text{triángulo}}$. Arquímedes demostró que esta desigualdad también es imposible.



— Puesto que el área del círculo no puede ser ni mayor ni menor que el área del triángulo, entonces, por reducción al absurdo, deben ser iguales: $A_{\text{círculo}} = A_{\text{triángulo}}$.

En el lenguaje algebraico actual es fácil de mostrar:

— $A_{\text{círculo}} = \pi r^2$.

— $A_{\text{triángulo}} = \dfrac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \dfrac{2\pi r \cdot r}{2} = \pi r^2$.

— Efectivamente: $A_{\text{círculo}} = A_{\text{triángulo}}$.

¡LO QUIERO EN MI LÁPIDA!

En el corolario a la proposición 34 del tratado *Sobre la esfera y el cilindro* se encuentra el resultado del que se cree que Arquímedes estaba más orgulloso:

> El volumen y la superficie del cilindro es igual a 3/2 el volumen y la superficie de la esfera inscrita en él (figura 3):
>
> $$V_{\text{cilindro}} = \frac{3}{2} V_{\text{esfera}}$$
>
> $$A_{\text{cilindro}} = \frac{3}{2} A_{\text{esfera}}.$$

En efecto, fue capaz de encontrar una razón entre el volumen de una esfera y el de un cilindro en el que encaja perfectamente;

FIG. 3

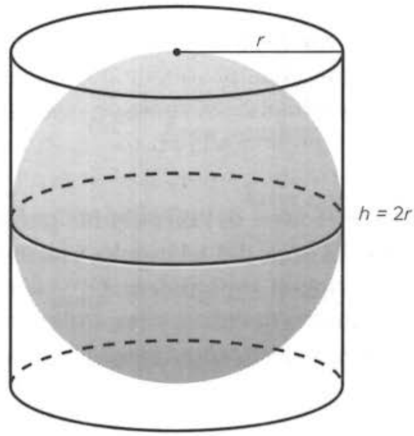
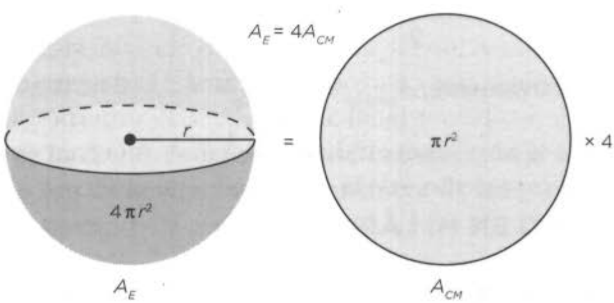


FIG. 4



dicho de otro modo, el diámetro del círculo coincide tanto con el diámetro de la base del cilindro como con su altura. El volumen del cilindro resulta ser una vez y media (3/2) el volumen de la esfera. Esta relación es la misma si hablamos de áreas. Como ya se ha dicho, Arquímedes llegó a pedir que se esculpiera este teorema en la lápida de su tumba a modo de epitafio. En el siglo I a.C. Cicerón aseguraba que consiguió verla; sin embargo, hoy el epitafio está perdido.

Para llegar a su conclusión Arquímedes realizó un recorrido por varias definiciones, postulados y proposiciones, demostrando además otras importantes relaciones de proporcionalidad entre

áreas. *Sobre la esfera y el cilindro* es un tratado formado por dos libros escritos en momentos distintos de su vida y por diferentes motivos. El Libro I consta de 44 proposiciones, seis definiciones y cinco postulados. Algunas proposiciones, además, tienen importantes corolarios; de hecho, la relación comentada entre el cilindro y la esfera está presentada en forma de corolario. El primer libro sirve de soporte instrumental al segundo, el cual es mucho más corto (solo tiene seis proposiciones) y está enfocado a responder algunas preguntas realizadas por Dositeo, a quien está dirigida la obra. Son destacables dos proposiciones del primero que conducirían a Arquímedes a la demostración del enunciado anterior. Se trata de las proposiciones 33 y 34:

> **Proposición 33.** *La superficie de la esfera es cuatro veces la superficie del círculo máximo de dicha esfera.*

Esta proposición (figura 4) se interpreta del siguiente modo intuitivo. Si sumamos cuatro veces el área A_{CM} del círculo máximo ($A_{CM} = \pi r^2$) resulta ser igual al área A_E de la superficie de toda la esfera ($A_E = 4\pi r^2$). Es decir, haría falta la misma cantidad de tinta para pintar la superficie de la esfera que la superficie de los cuatro círculos.

> **Proposición 34.** *El volumen de la esfera es cuatro veces el volumen de un cono que tiene por base el círculo máximo de la esfera y por altura su radio.*

En la notación algebraica actual es inmediato probar esta razón entre volúmenes (figura 5). El volumen V_C de un cono de radio r y altura r es

$$V_C = \frac{1}{3}\pi r^3,$$

mientras que el volumen V_E de una esfera de radio r es

$$V_E = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

FIG. 5

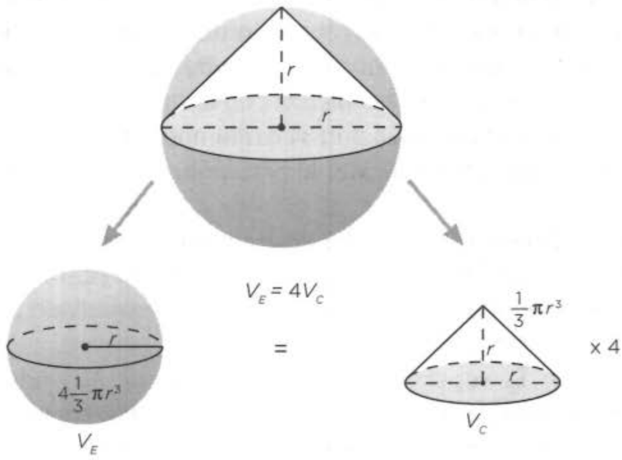
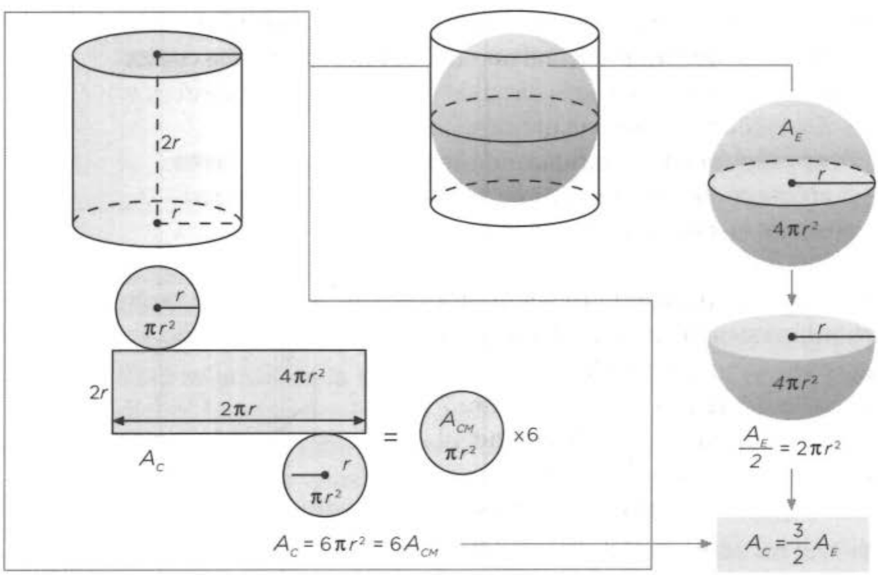

r
r
$V_E = 4V_C$
=
$\frac{1}{3}\pi r^3$
r
r
× 4
r
$4\frac{1}{3}\pi r^3$
V_E
V_C

FIG. 6


2r
r
A_E
r
$4\pi r^2$
r
πr^2
$4\pi r^2$
2r
$2\pi r$
r
$4\pi r^2$
=
A_{CM}
πr^2
×6
A_C
r
πr^2
$\frac{A_E}{2} = 2\pi r^2$
$A_C = 6\pi r^2 = 6A_{CM}$
$A_C = \frac{3}{2}A_E$

Por tanto: $V_E = 4V_C$. Es decir, el volumen de una esfera de radio r equivale al volumen de cuatro conos de base r y altura r. Con otras palabras, para rellenar por completo una esfera de radio r con 4 litros de agua, necesitaremos 4 conos de radio r y altura r rellenos por completo con 1 litro de agua cada uno.

Como corolario a la proposición 34 Arquímedes llegó a la conclusión comentada al principio, válida para volúmenes y áreas:

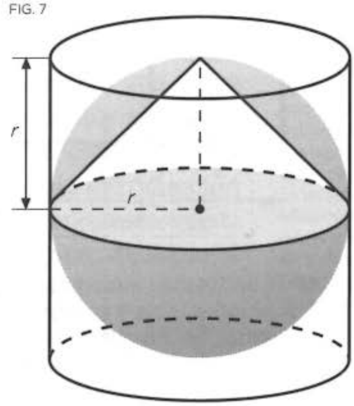
> La superficie de la esfera es 3/2 la superficie de un cilindro que tiene por base el círculo máximo de la esfera y por altura su diámetro (figura 6).

Para calcular la superficie del cilindro, puede entenderse como la suma de la superficie lateral más las dos tapas. La superficie lateral es un rectángulo de base $2\pi r$ y altura $2r$; el área será, por tanto, $4\pi r^2$.

Por otra parte, las dos tapas son círculos de radio r, de modo que el área de cada uno será πr^2. Sumando el área del lateral más dos veces el área de una de las tapas resulta $A_{\text{cilindro}} = 6\pi r^2$. Lo que se obtiene es que el área de la superficie del cilindro equivale a seis veces el área de un círculo del mismo radio. Puesto que una esfera equivale a cuatro círculos, seis círculos equivaldrán a una esfera y media. Atendiendo a estos resultados, necesitaríamos la misma cantidad de tinta para pintar seis círculos de radio r, la superficie de una esfera y media de radio r o un cilindro completo de base r y altura $2r$.

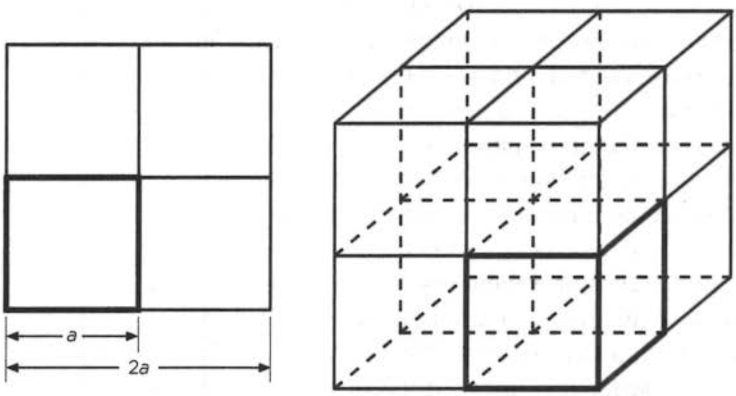
Hay que añadir que la relación obtenida también se aplica a los volúmenes, es decir, el volumen del cilindro es 3/2 el volumen de la esfera inscrita en él (figura 7). De esta manera, una forma de entender la razón es que si en una esfera cupiesen 2 litros de agua, en el cilindro correspondiente cabrían 3 litros. Por eso este resultado a veces se presenta diciendo que la razón del cilindro a la esfera es de 3 a 2.

FIG. 7



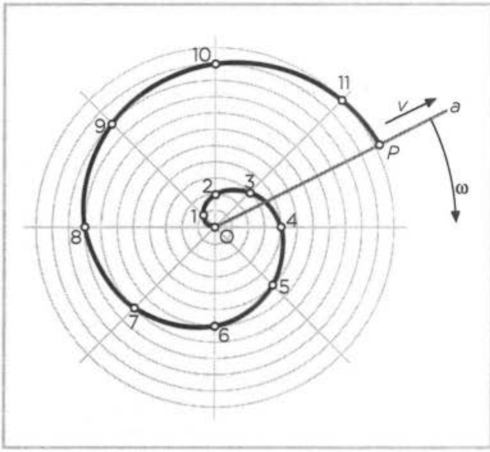
EL PROBLEMA DE DELOS

En el siglo v a.C. una epidemia de peste asoló la ciudad de Atenas y entre las víctimas se encontraba el mismísimo Pericles (495-429 a.C.), gobernador de la ciudad y figura que llegó a concentrar hombres de talento de todos los rincones del mundo griego. Un grupo de atenienses decidió entonces ir a consultar al Oráculo de Apolo, en la ciudad de Delfos, para saber cómo poder detener la peste. La respuesta del Oráculo, al parecer, fue que debían construir un nuevo altar cúbico cuyo volumen fuera el doble del anterior. Esta leyenda, en una de sus versiones, constituye el famoso problema de la duplicación del cubo, también conocido como «problema de Delos» o «problema délico»: duplicar un cubo usando solo regla y compás. En *Sobre la esfera y el cilindro* Arquímedes planteó lo que hoy sería una ecuación cúbica, recurso utilizado con anterioridad por otros matemáticos para, precisamente, la resolución del problema délico. En cualquier caso, de las obras de Arquímedes se deduce que era plenamente consciente de que para duplicar el cubo no podía aceptarse la intuitiva y tentadora idea de duplicar uno de los lados. En efecto, si el lado de la arista de un cubo es $l_1 = a$, su volumen será $V_1 = a^3$; si duplicamos el lado tendremos un nuevo cubo con lado $l_2 = 2a$, pero con volumen $V_2 = (2a)^3 = 8a^3$, es decir, $V_2 = 8V_1$. El volumen del cubo no se duplica, sino que se octuplica, como se muestra en la figura.



En la actualidad sabemos que el problema délico no tiene solución usando únicamente regla y compás, puesto que la solución incluye un número trascendente. En concreto, para duplicar un cubo de lado a, el nuevo lado debe ser $\sqrt[3]{2}a$.

LA ESPIRAL DE ARQUÍMEDES



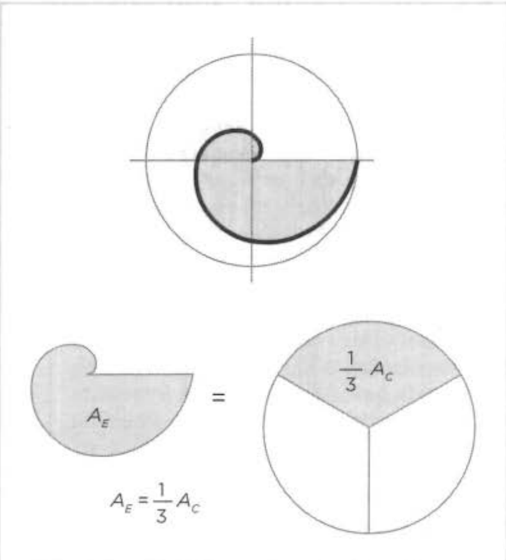
Una espiral es una curva generada a partir de un punto que se aleja progresivamente de un centro mientras da vueltas alrededor de él. Arquímedes estudió una espiral concreta, conocida con el nombre de «espiral de Arquímedes» (véase la figura) y que suele definirse mediante la forma en que esta se construye:

> La espiral de Arquímedes es la línea construida por un punto que se mueve a velocidad constante por una recta que gira a velocidad angular constante sobre un punto de origen fijo.

Mientras que la recta *a* gira a una velocidad angular constante ω en torno al centro *O*, el punto *P* se desplaza a una velocidad constante *v* por la recta *a*. Una forma sencilla de dibujar la espiral es trazar ocho octantes (dos líneas perpendiculares y sus bisectrices) y un conjunto de circunferencias equidistantes y concéntricas. Cada octavo de giro la espiral salta de una circunferencia a la siguiente, es decir, se señala un punto en cada intersección entre una recta y una circunferencia, saltando a la de radio superior.

En el tratado *Sobre las espirales* Arquímedes estudia la espiral que lleva su nombre y algunas propiedades relacionadas con ella. Este tratado se considera una de las obras más complejas del sabio griego; de hecho, fue pasado por alto en la Antigüedad, y considerado erróneo por algunos matemáticos de los siglos XVII y XVIII, que no supieron entenderlo. Su importancia no solo radica en el campo de las matemáticas, sino también en el de la filosofía. Es el primer documento conocido en el que se calcula la tangente a una curva diferente a una circunferencia, es decir, un paso más allá de la homogeneidad del círculo platónico. Matemáticamente tiene una importancia crucial, pues podría formar parte de la introducción de un curso superior de análisis diferencial; este supuesto queda patente en el hecho de que Arquímedes estuvo a punto de llegar al cálculo integral en las demostraciones que realizó.

Sobre las espirales consta de 28 proposiciones y fue enviado a Dositeo de Pelusio con una carta a modo de preámbulo. Las once primeras proposiciones son resultados auxiliares usados más tarde por Arquímedes para demostrar otros más interesantes.



Tras la primera vuelta, la espiral cubre un área que es igual a un tercio del área encerrada por la circunferencia que envuelve a dicha espiral.

Esa forma de trabajar es común en toda la obra de Arquímedes, usar proposiciones auxiliares que sirvan de apoyo a otras de nivel superior. De hecho, él mismo adelanta en el preámbulo los cuatro resultados más importantes, considerándose el resto como auxilio para ellos. Tras las primeras once proposiciones realiza una lista de siete definiciones, la primera de las cuales muestra, precisamente, la definición de la espiral de Arquímedes que se ha dado anteriormente. En las proposiciones 12 a la 20 estudia las propiedades de las tangentes a la espiral y mide además la longitud de los giros de la misma, para compararlos con los círculos que la componen. En esa parte de la obra muestra cómo calcular la tangente a la espiral en un punto, aunque no dejó escrito cuál fue su análisis para llegar a dicha conclusión. Finalmente, de la proposición 21 a la 28 estudia el área de la curva en giros sucesivos, que son los resultados que más han interesado a la comunidad investigadora. Dada la dificultad del tratado, nos quedamos solo con una de las proposiciones, la número 24:

> El área barrida por la espiral en su primera vuelta equivale a la tercera parte del área del círculo que la envuelve.

Arquímedes demostró este resultado mediante el método de exhaución (véase la figura): dividiendo el área de la espiral en pequeñas superficies de secciones circulares, realizando las sumas pertinentes y, por reducción al absurdo, concluyendo que no puede ser mayor ni menor a un tercio del círculo, o, lo que es lo mismo, el área de la primera vuelta de la espiral es exactamente 1/3 del círculo que la circunscribe.

DANDO VUELTAS

Las espirales son curvas que se generan mediante un punto que gira alrededor de un centro alejándose de él a cada vuelta. En la propia naturaleza aparecen espirales de varios tipos, en plantas, moluscos, etc. Así, los matemáticos se han visto motivados a estudiar estas curvas sorprendentes. Incluso en las creaciones humanas aparecen espirales, como es el caso de los discos de vinilo o de los muelles. Algunos tipos de espirales son:

— La espiral de Arquímedes o aritmética (figura 1). Su ecuación es $r=a+b\theta$.

— La espiral de Fermat o parabólica (figura 2). Su ecuación es $r=\theta^{1/2}$.

— La espiral hiperbólica o recíproca (figura 3). Es la inversa a la espiral de Arquímedes. Su ecuación es $r=a/\theta$.

— La espiral logarítmica o espiral de crecimiento (figura 4). Su ecuación es $r=\log_b(r/a)$.

FIG. 1

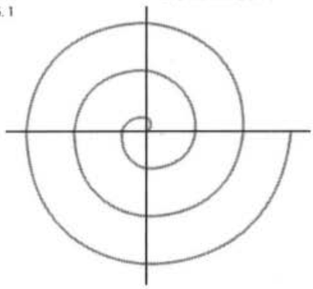


FIG. 2

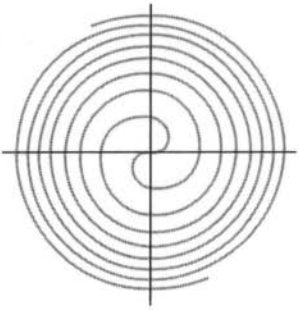


FIG. 3

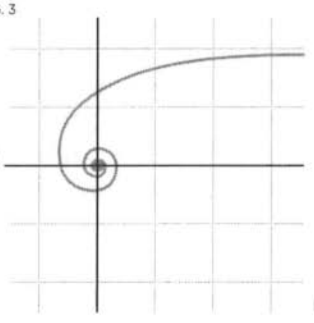
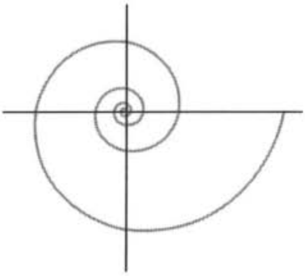


FIG. 4



Los tres conocidos problemas de la Antigüedad son la duplicación del volumen de un cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo. Algunos expertos afirman que el objetivo fundamental que perseguía Arquímedes en su tratado *Sobre las espirales* era dar solución a dos de esos problemas. En efecto, con su espiral se puede resolver la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo, aunque saltándonos una de las premisas. El problema debía ser resuelto únicamente mediante el uso de regla y compás, si bien la espiral conlleva un procedimiento cinemático intrínseco. Por tanto, siendo rigurosos, el problema no está realmente resuelto. De hecho, en 1837 el matemático francés Pierre Wantzel publicó la imposibilidad de trisecar el ángulo y de duplicar el cubo usando únicamente regla y compás. Más adelante, en 1882, el matemático alemán Ferdinand von Lindemann demostró que π es un número trascendente y, con ello, que la cuadratura del círculo usando únicamente regla y compás es imposible.

FIG. 8

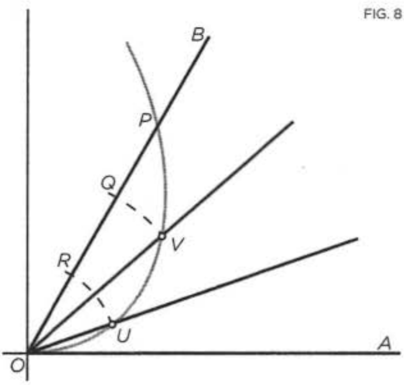
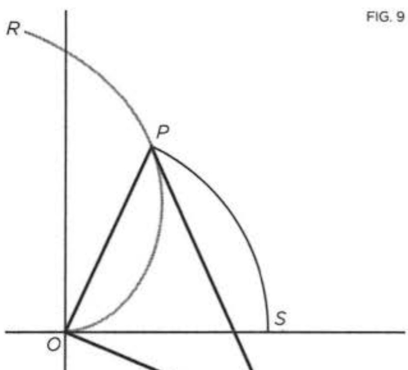


FIG. 9



Así, la trisección del ángulo (figura 8) consiste en dividir un ángulo en tres partes iguales usando solo regla y compás. Con la espiral de Arquímedes puede darse solución a este problema, aunque, como se ha dicho, saltándonos esa premisa. Para ello se han de seguir los siguientes pasos:

— El ángulo a trisecar será el formado por las semirrectas *OA* y *OB*.

— La semirrecta *OA* es la que gira para formar la espiral y el punto *P* es el que se desliza por esa recta.

— Se divide en tres partes el segmento *OP*, obteniéndose los puntos *R* y *Q*.

— Se trazan arcos de circunferencia desde *O* con radios *OR* y *OQ*, que cortan a la espiral en los puntos *U* y *V*, respectivamente.

— Se trazan líneas desde *O* pasando por *U* y pasando por *V*. Se obtiene así la trisección.

El problema de la cuadratura del círculo (figura 9) consiste en encontrar un cuadrado cuya área sea equivalente a un círculo dado, usando únicamente regla y compás. Con la espiral de Arquímedes también puede buscarse el resultado, aunque de nuevo faltando a la premisa de la regla y el compás, debido al carácter cinemático de la espiral. Los pasos a seguir son:

— Se traza por un punto *P* de la espiral la tangente *PQ*.

— Se traza el radiovector *OP*, es decir, un segmento que una el centro de la espiral con el punto *P* considerado.

— Se traza la perpendicular en *O* al segmento *OP*, hasta que corte a *PQ* en *Q*.

— Se traza el arco *PS*, de centro *O* y radio *OP*.

— Se puede demostrar que el segmento *OQ* es igual en longitud al arco *PS*.

— A partir de aquí se demuestra que la tangente a la espiral en *R* determina un segmento que se extiende hasta el eje horizontal, que es igual a la cuarta parte de una circunferencia, lo cual se traduce en la cuadratura del círculo.

LA CUADRATURA DE LA PARÁBOLA

En el tratado *Sobre la cuadratura de la parábola* Arquímedes presenta varios teoremas mecánicos que, según apunta en el preámbulo, no habían sido estudiados antes. Es decir, él mismo los había planteado. El más reproducido en la literatura divulgativa es el de la cuadratura de la parábola (proposición 24):

> El área de la superficie comprendida entre una parábola y una recta que la corta es 1/3 superior al área del triángulo cuya base es la recta y de igual altura a la parábola (figura 10).

Su intención era, por tanto, compartir sus descubrimientos, y qué mejor forma de hacerlo que enviándolos a los estudiosos de Alejandría. Por esta razón se lo remitió a Dositeo de Pelusio, siendo la primera de las obras que compartió con él tras la muerte de Conón de Samos. El tratado *Sobre la cuadratura de la parábola* se divide en 24 proposiciones. En las cinco primeras introduce algunas propiedades de la curva; de la proposición 6 hasta la 16 realiza un estudio mecánico de la parábola, basándose en las leyes de la palanca. En la proposición 17 presenta por primera vez el resultado de la cuadratura de la parábola mediante su método mecánico y en las siguientes proposiciones utiliza el método de exhaución para acabar demostrando dicha cuadratura (proposición 24). Así que Arquímedes realiza una demostración de la cuadratura mediante el método mecánico, pero tras no considerarlo riguroso, encontró el mismo resultado con métodos geométricos clásicos, o sea, por exhaución. Es interesante señalar que la cuadratura de la parábola constituye el primer caso conocido en la obra de Arquímedes en el que hizo uso del método mecánico. Existe una tercera demostración de la cuadratura, contenida en el tratado *El método sobre los teoremas mecánicos*.

Como se ha dicho, para demostrar la proposición 24 empleó el método de exhaución (figura 11). Comienza dando por conocido el resultado, es decir, afirma que el área A_P de la parábola es 4/3 el área A_T del triángulo ABC ($A_P = \frac{4}{3} A_T$). Los pasos que sigue son:

FIG. 10

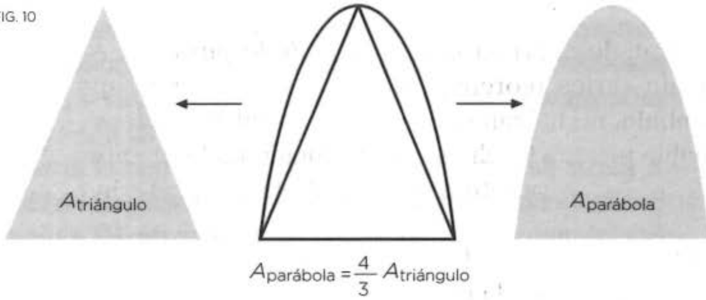
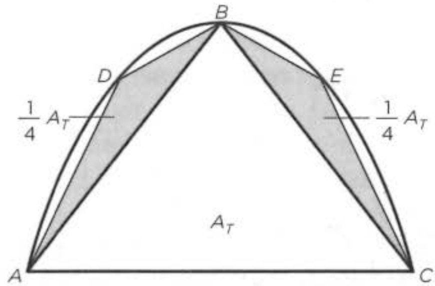


FIG. 11



— Traza una cuerda de la parábola (*AC*) y, a partir de ella, construye el triángulo elevando dos líneas rectas desde los puntos de corte (*A* y *C*) hasta el punto más alto de la parábola (*B*). Así, aparecen dos nuevas cuerdas en la sección parabólica: *AB* y *CB*.

— De cada nueva cuerda se pueden trazar sendos triángulos *ADB* y *BEC*, según el mismo procedimiento.

— El trazado se puede repetir tanto como se quiera, para que el polígono se parezca cada vez más a la parábola.

— En la proposición 21 demostró que cada triángulo dibujado según estas características tiene un área que es la cuarta parte del triángulo anterior. Es decir, se tiene que $A_{ADB} = A_{BEC} = \frac{1}{4} A_{\text{triángulo}}$.

— Asume que el espacio comprendido entre el triángulo y la curva parabólica puede ser completado mediante la composición de triángulos a partir de las nuevas cuerdas en un proceso reiterativo.

— A partir de esta idea llega a demostrar que el área de la parábola no puede ser mayor de 4/3 el área del triángulo inicial, pero tampoco puede ser menor de 4/3 el área de dicho triángulo. Es imposible tanto $A_{\text{parábola}} > \frac{4}{3} A_{\text{triángulo}}$ como $A_{\text{parábola}} < \frac{4}{3} A_{\text{triángulo}}$.

— Así que, por reducción al absurdo, se tiene la relación $A_{\text{parábola}} = \frac{4}{3} A_{\text{triángulo}}$, como se quería demostrar.

SUMANDO HASTA CASI EL INFINITO

El testimonio más antiguo que puede considerarse como un antecedente del cálculo infinitesimal descansa sobre la figura de Zenón de Elea (490 a.C.-430 a.C.). Este filósofo griego advirtió con la famosa paradoja de la flecha que no tenía sentido considerar un tiempo infinitamente divisible a la par que un espacio constituido de indivisibles, es decir, de partes que no pueden ser divididas a partir de cierta cantidad. El procedimiento seguido (dividir reiteradamente un segmento por su mitad) significó un precedente en los trabajos de los matemáticos griegos de los siguientes siglos.

Arquímedes acarició la idea de límite en varias ocasiones cuando aplicaba el método de exhaución. Una de ellas se encuentra contenida durante el recorrido del tratado *Sobre la cuadratura de la parábola*. Se trata de una suma de infinitos términos que da como resultado un número finito. Si bien Arquímedes no llegó a sumar todos los términos, sí pudo dar un resultado satisfactorio a dicha suma de manera intuitiva. Esta suma se encuentra en la proposición 23, la penúltima del tratado, justo antes de la proposición en la que se presenta por segunda vez en el texto la cuadratura de la parábola. Apoyándose en este resultado pudo demostrar la cuadratura de la parábola mediante reducción al absurdo. De

hecho, la proposición 23 fue un resultado auxiliar para llegar a dicha cuadratura; es decir, puede considerarse como una herramienta de cálculo para sus propósitos. El rigor con el que trata el asunto no tuvo paragón hasta la época de Newton y Leibniz. La proposición 23 dice:

> Si se disponen sucesivamente magnitudes en la razón de cuatro a uno, todas las magnitudes más la tercera parte de la menor sumadas en una sola serán cuatro tercios de la mayor.

Veámoslo de un modo más comprensible; aunque Arquímedes lo presenta para segmentos, la idea también es válida para áreas. Se toma un cuadrado y se divide en cuatro partes iguales. Se suma el cuadrado y su cuarta parte. La cuarta parte se divide a su vez en cuatro, sumando cada vez una de las partes obtenidas, y así sucesivamente tanto como se desee. Luego se realiza la suma de las superficies del cuadrado y todas las cuartas partes resultantes más la tercera parte de la división más pequeña. El resultado, se divida las veces que se divida, es siempre 4/3 del cuadrado original (véanse las figuras 12 y 13 en la página siguiente; en la figura 12 se realiza una sola división, y en la figura 13 se llevan a cabo dos divisiones).

Efectivamente, como puede observarse el resultado siempre es $A+\frac{1}{3}A$, es decir, la suma de todas las sucesivas divisiones es 1/3 del cuadrado mayor. A esto fue a lo que pudo llegar Arquímedes de manera intuitiva, así, si se divide el cuadrado n veces (no realizó la suma infinita, sino que expresó que podría realizarse tantas veces como se quisiera):

$$A+\left[\frac{1}{4}A+\frac{1}{4^2}A+\cdots+\frac{1}{3}\frac{1}{4^n}A\right]=A+\frac{1}{3}A=\frac{4}{3}A.$$

En la actualidad cualquier estudiante de secundaria podría realizar esta suma por sí mismo mediante el concepto de progresión geométrica: una sucesión de elementos en la que cada uno se obtiene del anterior multiplicado por un número constante llamado razón. En efecto, el término general de una progresión geométrica es: $a_n=a_1\cdot r^{(n-1)}$.

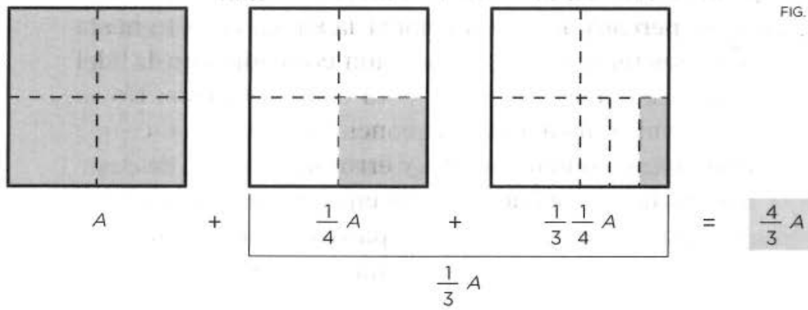


FIG. 12

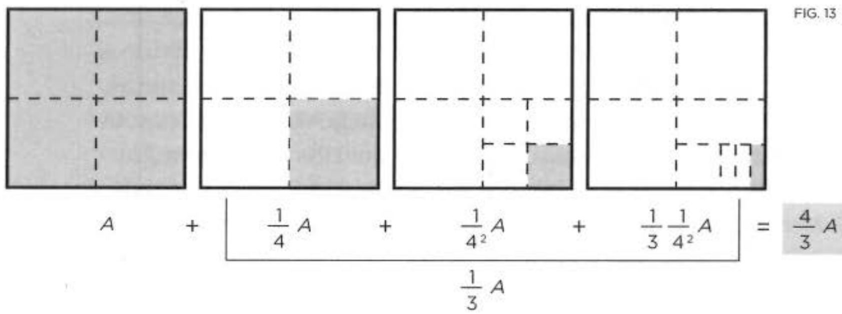


FIG. 13

En nuestro caso tendremos: $\begin{matrix} a_1 = A \\ r = \frac{1}{4} \end{matrix} \rightarrow a_n = \frac{1}{4^{(n-1)}} A$.

Así, dando valores a la n tenemos todos los términos de la sucesión:

$$A,\ \frac{1}{4}A,\ \frac{1}{4^2}A,\ \frac{1}{4^3}A\ldots$$

Se pueden sumar todos los términos (suma infinita) de la sucesión, puesto que es decreciente, haciendo uso de la siguiente expresión (paso al límite):

$$s_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{A}{1-\frac{1}{4}} = \frac{A}{\frac{3}{4}} \rightarrow S_\infty = \frac{4}{3}A.$$

Como era de esperar, este es el valor que obtuvo Arquímedes sin necesidad de realizar la suma de todos los términos. La clave está en que se percató de que al truncar la suma, el resto hasta llegar a todos los términos de la sucesión coincidía con 1/3 del término donde se había truncado, fuera cual fuera este. No se sabe con exactitud cómo llegó a esta conclusión, pero parece que hubiese usado un método de ensayo y error hasta dar con la respuesta correcta, que es la que propone en su tratado. El caso es que atisbó y se quedó a un peldaño del paso al límite mediante la reiteración, un método que se sigue usando para encontrar la fórmula general de una sucesión por recurrencia.

<table>
<tr><th>Término</th><th>a_1</th><th>a_2</th><th>a_3</th><th>...</th><th>a_n</th><th>Resto hasta el infinito</th></tr>
<tr><td>Valor del término</td><td>A</td><td>$\frac{1}{4}A$</td><td>$\frac{1}{4^2}A$</td><td>...</td><td>$\frac{1}{4^n}A$</td><td>...</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Suma</td><td>$A+$</td><td colspan="4">$\frac{1}{4}A+\frac{1}{4^2}A+\dots+\frac{1}{4^n}A+$</td><td>$\frac{1}{3}\frac{1}{4^n}A$</td></tr>
<tr><td>$A+$</td><td colspan="5">$\frac{1}{3}A$</td></tr>
<tr><td colspan="6">$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{(n-1)}}A=\frac{4}{3}A$</td></tr>
</table>

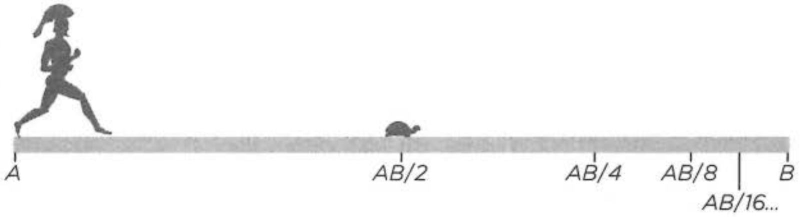
«EL PROBLEMA DE LOS BUEYES»

Al acercarnos a la obra de Arquímedes es fácil notar que el discurso adoptado es casi eminentemente ensayístico, puesto que su destinatario es más el estudioso en la materia matemática que el hombre de a pie. A pesar de ello, el contenido no se lleva mal con el estilo de redacción; así, en *El problema de los bueyes* deja dis-

AQUILES Y LA TORTUGA

Zenón de Elea fue un filósofo griego perteneciente a la escuela eleática famoso por el planteamiento de varias paradojas. Quizá una de las más conocidas sea la de Aquiles y la tortuga. Se decía del guerrero aqueo Aquiles que era tan rápido que le llamaban «el de los pies ligeros». Zenón propuso una competición muy peculiar: una carrera entre Aquiles y una tortuga, la cual se presuponía la mitad de lenta. Pero Aquiles, en un acto de arrogancia, otorgaba una ventaja de la mitad del camino a la tortuga. Zenón propuso que cuando Aquiles llegara a la posición media de la distancia a cubrir la tortuga habría recorrido una distancia de la cuarta parte del camino total, es decir, la mitad de lo que quedaba por recorrer. Por lo que se vuelve a la situación inicial: cuando Aquiles ocupara la nueva posición de la tortuga, esta se habría desplazado nuevamente, y así hasta el infinito, de manera que Aquiles nunca la alcanzaría. Arquímedes encontró la respuesta a la paradoja, aunque no llegó a desarrollar el cuerpo matemático que la justifica: la suma de infinitos términos puede dar lugar a un número finito, es decir, no infinito. Dicho de otro modo: a Zenón de Elea le faltaba una herramienta matemática fundamental, el cálculo infinitesimal. Aquiles alcanza a la tortuga porque a pesar de que se pueda dividir la recta en infinitos trozos, al ser estos cada vez más pequeños, la suma es un número finito. Actualmente, el problema puede representarse mediante la siguiente notación:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots=1$$



Cuando Aquiles alcance la posición *AB*/2, donde estaba la tortuga, esta se encontrará en *AB*/4. En el momento en que Aquiles alcance la posición *AB*/4 que ocupaba la tortuga, esta estará en *AB*/8, y así sucesivamente.

currir su pluma por los caminos que ofrece la poesía, aunque es cierto que algunos expertos han dudado de su auténtica autoría, ya sea del poema o del problema propiamente dicho. Incluso se ha llegado a dudar de que pudiera resolverlo por sí mismo, aunque el tratamiento de los números grandes mediante miríadas arroja algo de luz a una posible resolución hecha por Arquímedes. Esta pequeña obra es un conjunto de veintidós dísticos elegíacos basados en una obra de Homero; el dístico, que consta de dos versos, es una composición muy habitual en la poesía griega. El manuscrito fue descubierto por el poeta alemán Gotthold Ephraim Lessing en 1773, en la Biblioteca Herzog de Wolfenbüttel, Alemania.

> «Luego, cuando hubimos escapado de la terrible Caribdes
> y de Escila, pronto llegamos a una isla espléndida.
> Allí estaban las vacas de amplia testuz y los gruesos
> y muchos rebaños de Helios Hiperión.»
>
> — Extracto de la *Odisea* de Homero, del que se ha llegado a afirmar que Arquímedes se basó en él para plantear el problema de los bueyes.

El problema consistía en calcular el número de reses de ganado de ocho tipos distintos bajo una serie de condiciones y restricciones muy concretas. En primer lugar contextualizó el problema: se trataba de cabezas de ganado del dios Sol que pastaban en las llanuras de la siciliana isla de Trinacia. Clasificó las reses, a saber, cuatro tipos de toros y otros cuatro de vacas. La diferencia radicaba en el color: blancos, negros, moteados y amarillos. A continuación introdujo un total de nueve condiciones; las siete primeras eran ecuaciones simples pero las dos últimas convertían el asunto en un problema de análisis indeterminado. La inclusión de las dos últimas condiciones condujo a Arquímedes a presentar un antecedente a la conocida ecuación diofántica del matemático inglés John Pell (1611-1685), es decir, la que tiene la forma general $\alpha^2 - a\beta^2 = 1$. Arquímedes la resolvería solamente para un valor de a, el que resulta de su propio problema. Escribir las ecuaciones a partir de las condiciones dadas por Arquímedes es fácil, como puede comprobarse a continuación:

Toros	Vacas
W: Número de toros blancos.	*w*: Número de vacas blancas.
X: Número de toros negros.	*x*: Número de vacas negras.
Y: Número de toros moteados.	*y*: Número de vacas moteadas.
Z: Número de toros amarillos.	*z*: Número de vacas amarillas.

1. El número de toros blancos (W) es la mitad más la tercera parte de los toros negros (X) más los amarillos (Z).

2. El número de toros negros (X) es la cuarta parte más la quinta parte de los moteados (Y) más los amarillos (Z).

3. El número de toros moteados (Y) es la sexta parte más la séptima parte de los blancos (W) más los amarillos (Z).

4. El número de vacas blancas (w) es igual a un tercio más un cuarto de la suma de los toros negros (X) más las vacas negras (x).

5. El número de vacas negras (x) es igual a la cuarta parte más la quinta parte de la suma de los toros moteados (Y) más las vacas moteadas (y).

6. El número de vacas moteadas (y) es igual a la quinta parte más la sexta parte de la suma de los toros amarillos (Z) más las vacas amarillas (z).

7. El número de vacas amarillas (z) es igual a la sexta parte más la séptima parte de la suma de los toros blancos (W) más las vacas blancas (w).

8. La suma del número de toros blancos (W) y toros negros (X) es un número al cuadrado.

9. La suma de los toros moteados (Y) más los toros amarillos (Z) es un número triangular. Un número triangular viene definido por la expresión

$$\frac{m \cdot (m+1)}{2}.$$

1. $W = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)X + Z$
2. $X = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)Y + Z$
3. $Y = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)W + Z$
4. $w = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)X + x$
5. $x = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)Y + y$
6. $y = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right)Z + z$
7. $z = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)W + w$
8. $W + X = n^2$
9. $Y + Z = \frac{m \cdot (m+1)}{2}.$

Los matemáticos supieron encontrar pronto la solución, teniendo en cuenta solo las primeras siete ecuaciones. El número total de reses es de 50 389 082. Sin embargo, las dos últimas condiciones complican increíblemente el problema; de hecho, no existe una única solución, sino que depende de dos coeficientes. Hasta 1880 no se obtuvo una primera solución aproximada del problema completo, y lo conseguiría A. Amthor mediante el uso de exponenciales y sería la más pequeña de las soluciones. La

NÚMEROS TRIANGULARES

Los números triangulares son aquellos que pueden ordenarse formando un triángulo y pueden calcularse a partir de la expresión

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

De esta forma se pueden calcular sustituyendo el valor de n por un número concreto. En la figura 1 se muestran algunos ejemplos. Un caso particular muy conocido es la *Tetraktys* (figura 2), correspondiente a $T_4 = 10$, considerado por los pitagóricos un número sagrado.

FIG. 1

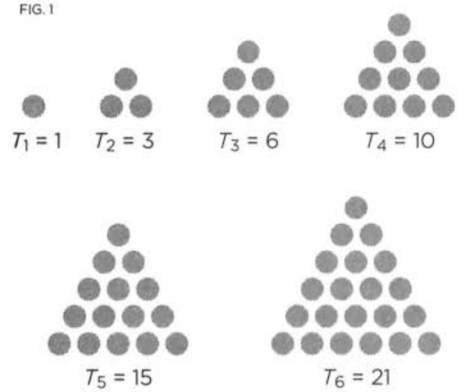
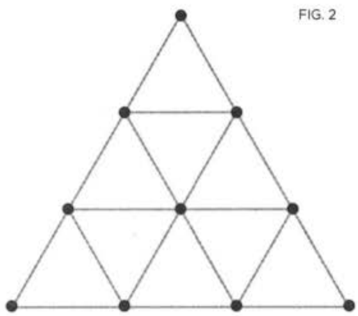


FIG. 2



solución aproximada de Amthor es de $7{,}76 \cdot 10^{206\,544}$ reses en total. Se trata pues de un número de 206 545 cifras. Si quisiéramos escribir el número completo a un dígito por segundo, sin descanso, tardaríamos unos 2 días y 9 horas y usaríamos, al menos, 50 páginas. Y es la solución más pequeña...

El problema de los bueyes nos ha llegado bajo el supuesto de que fue enviado a Eratóstenes con una carta previa. En la propia redacción del problema Arquímedes retaba a cualquier persona que leyese el texto a resolver el acertijo, diciendo que «si llegaras a decir exactamente cuántas eran las reses del Sol, no serías lla-

mado ignorante ni inexperto en números»; y a quien fuera capaz de resolverlo por completo, incluidas las dos últimas restricciones, le dice que se vaya jactando de «ser portador de la victoria» y que se tenga por «fecundo en esta sabiduría».

EL ARTE DE FILETEAR UN PARABOLOIDE

En su tratado *Sobre los conoides y los esferoides* Arquímedes realizó un estudio sobre las superficies sólidas generadas a partir de cónicas de revolución. Este va acompañado, una vez más, de una carta a Dositeo en la que ofrece un resumen de lo que encontrará en la obra, como era común en el estilo de Arquímedes. Tras las definiciones previas y un lema, siguen un total de treinta y dos proposiciones.

Un paraboloide (figura 14) es la superficie tridimensional generada al hacer girar una parábola alrededor de su eje; un hiperboloide (figura 15) es la superficie tridimensional generada al hacer girar una hipérbola alrededor de su eje; y un elipsoide (figura 16) es la superficie tridimensional generada al hacer girar una elipse alrededor de uno de sus ejes.

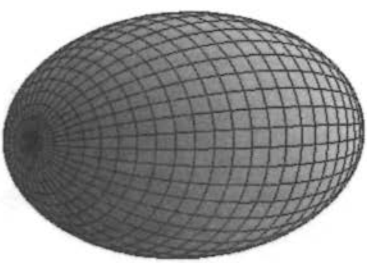
FIG. 14



FIG. 15



FIG. 16



Las veinte primeras proposiciones tienen un carácter auxiliar para las proposiciones 21 a 32, que son los resultados importantes del tratado. En *Sobre los conoides y los esferoides* se aprecia un cálculo integral incipiente. Se introducen los conceptos básicos para poder abordar un problema de volúmenes de curvas de revolución mediante la integración definida; sin embargo, no se llegaría hasta este punto debido a que no había sido introducido aún el concepto de límite. Así, la idea de base presente en el texto es trocear los sólidos de revolución en pequeños cilindros, tantos como se quieran, hasta acercarse lo más posible a rellenarlo (agotamiento) o cubrirlo (compresión). Por tanto, Arquímedes usó aquí en todo su esplendor el método de exhaución. De esta manera, lo único que necesitaba era demostrar que, efectivamente, podía acotar el paraboloide por exceso y por defecto, algo que expresa, por ejemplo, en la proposición 19: «Es posible inscribir una figura sólida y circunscribir otra compuesta de cilindros de la misma altura, de modo que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que cualquier magnitud sólida propuesta». Es decir, se encaja el paraboloide en un cilindro y se corta el cilindro en «rodajas» de la misma altura (pequeños cilindros achatados, más anchos que altos, a modo de pastillas). Estas rodajas se cortan por pares, de tal manera que una esté inscrita en el paraboloide (por dentro) y la otra circunscrita (por fuera). El volumen del paraboloide será un valor intermedio entre el volumen total de las rodajas que circunscriben y las rodajas que inscriben. Como se muestra en la figura, a mayor número de rodajas (menor altura por cada una) más aproximado será el valor del volumen calculado. La idea es muy parecida a la usada en la cuadratura de la circunferencia.

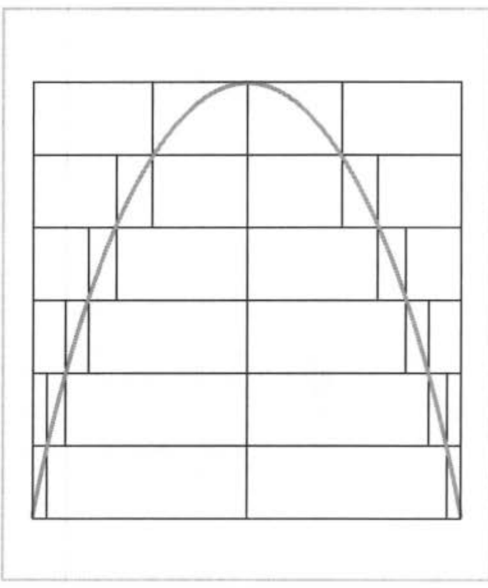


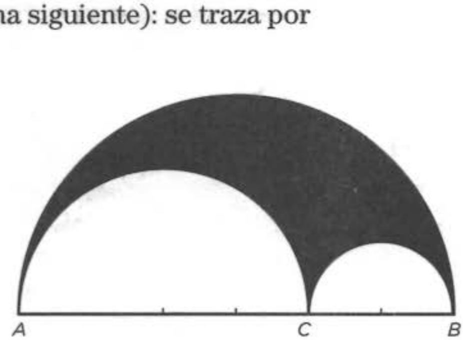
Ilustración de la proposición 19 de *Sobre los conoides y los esferoides*. Se aprecia cómo el paraboloide se divide en cilindros muy planos a modo de cortes, tanto interiores como exteriores al volumen.

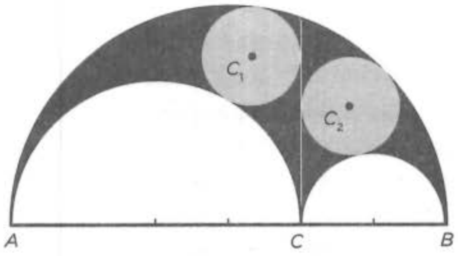
EL CUCHILLO DE ZAPATERO Y LA BODEGA PARA LA SAL

El tratado conocido como *El libro de los lemas* difiere del resto de la obra de Arquímedes en un punto fundamental: no se dispone del texto griego. Ha llegado hasta nuestros días gracias a la traducción árabe del astrónomo, matemático y traductor Thabit ibn Qurra en el siglo IX. Se trata por tanto del único testimonio que otorga la autoría del libro a Arquímedes, lo cual arroja algunas dudas sobre su verdadero carácter arquimediano. Es un libro que ha sido considerado como didáctico por lo elemental de sus proposiciones y recoge algunos resultados conocidos o inmediatos. Por ejemplo, la proposición 7 demuestra que el área del círculo que circunscribe a un cuadrado es el doble de la del círculo que lo inscribe. Consta de un total de quince proposiciones y el propio Arquímedes aparece citado en el libro, por ejemplo en la proposición 4, al presentarse la figura geométrica llamada *arbelos*.

El término griego *arbelos* significa literalmente «cuchillo de zapatero», debido a que su forma recuerda dicha herramienta. El arbelos es la región del plano limitada por tres semicírculos tangentes. En la figura aquí representada, el arbelos corresponde a la sección sombreada y limitada por los semicírculos de diámetro $\overline{AB}$ $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$.

El arbelos tiene curiosas propiedades que pueden ser estudiadas en un curso elemental de geometría. Tal vez la más atractiva sea la relacionada con los llamados *círculos gemelos de Arquímedes* (véase la figura de la página siguiente): se traza por C una perpendicular a $\overline{AB}$ hasta que corte a la circunferencia de mayor diámetro. Esta perpendicular divide el arbelos en dos superficies. A continuación se trazan los círculos C_1 y C_2 a ambos lados de la línea perpendicular y tangentes a dicha línea y a las circunferencias mayor y menor correspondientes al lado donde se





encuentren. En la proposición 5 se demuestra que estos dos círculos tienen la misma área ($A_{C_1} = A_{C_2}$) sea cual sea el punto C, de ahí el tratamiento de círculos gemelos de Arquímedes. Otros círculos relacionados con el arbelos y con nombre propio son el círculo de Apolonio, el círculo de Papo y el círculo de Bankoff.

La otra figura que aparece definida en *El libro de los lemas* es el salinon, término proveniente del griego, según la interpretación del historiador de la matemática griega Thomas Heath, y que viene a significar «salero», o «bodega para la sal». En la proposición 14 se indican los pasos a seguir para construirla y se vuelve a citar al propio Arquímedes. El hecho de que aparezca citado en varias ocasiones en este tratado es indicativo de su carácter propedéutico; incluso en la actualidad podrían incluirse sus tratados en un manual de geometría de escuela primaria por su profundo interés didáctico. Las indicaciones que aparecen en el libro para la construcción del salinon (figura 17, pagina 116) son las siguientes:

— Se traza un segmento $\overline{AB}$ y sea el centro el punto O.

— Se traza una semicircunferencia sobre el segmento $\overline{AB}$ cuyo diámetro sea el del segmento.

— Sobre el segmento $\overline{AB}$ se trazan otras dos semicircunferencias de iguales diámetros (menor que la mitad del segmento), de forma que sean respectivamente tangentes a la primera semicircunferencia en A y en B.

— Resultan las semicircunferencias de diámetros $\overline{AD}$ y $\overline{EB}$, con centros en G y en H, respectivamente.

— Se traza una semicircunferencia con diámetro $\overline{DE}$ en el sentido contrario a las dos anteriores, cerrando así una superficie.





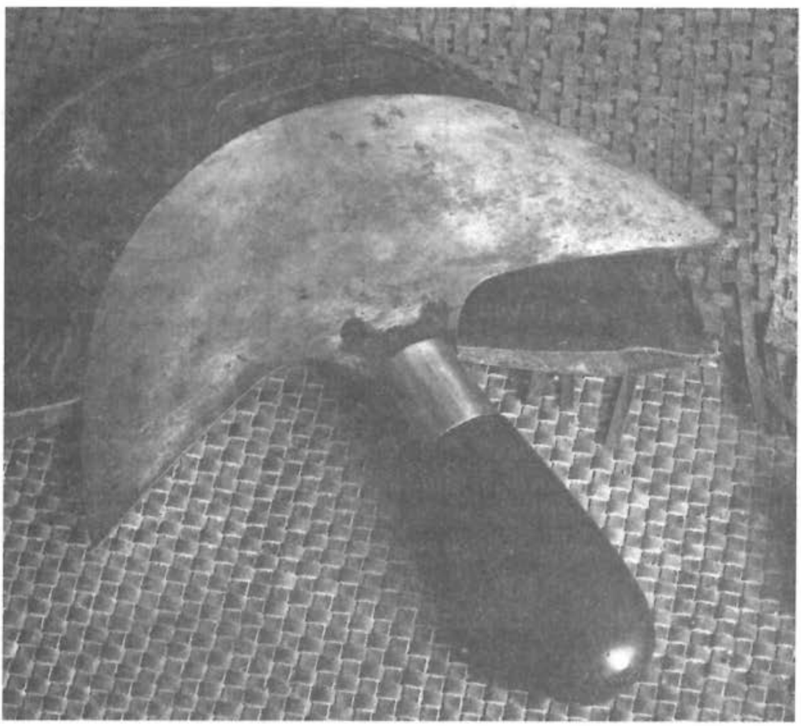


FOTO SUPERIOR IZQUIERDA:
Lugar de la supuesta tumba de Arquímedes, en Siracusa, Sicilia.

FOTO SUPERIOR DERECHA:
En 1965, el cálculo de la solución menor del problema de los bueyes tuvo ocupado al ordenador IBM 7040 durante 7 horas y 49 minutos (foto: Columbiana photo archive).

FOTO INFERIOR:
En *El libro de los lemas* Arquímedes introdujo la figura geométrica arbelos («cuchillo de zapatero»), así llamada por el parecido que guarda con dicha herramienta (foto: Thomas Schoch).

FIG. 17

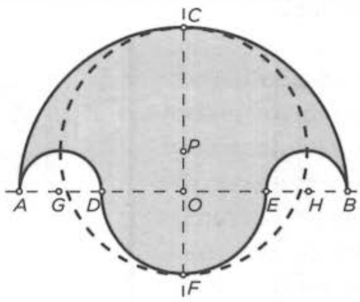
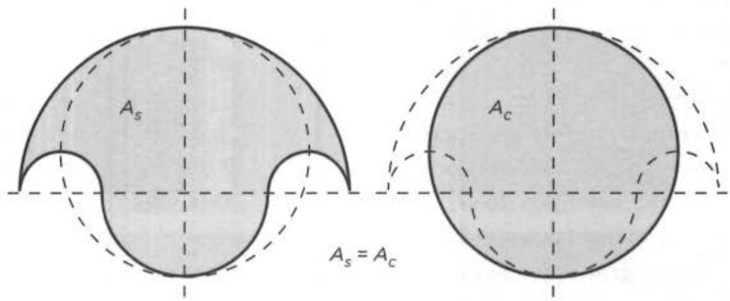


FIG. 18



— La superficie encerrada por la línea resultante de unir las cuatro semicircunferencias es el salinon.

Es interesante señalar que a la par que Arquímedes presenta el salinon, en la misma proposición 14, muestra la siguiente propiedad:

— Se traza una línea recta perpendicular a $\overline{AB}$ en O.

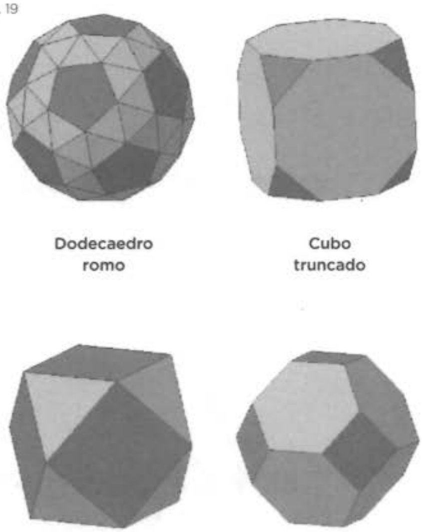
— Esta línea corta al salinon en C y en F.

— Sea P el punto medio entre C y F; se traza una circunferencia de centro P y diámetro $\overline{CF}$.

— Se puede demostrar que el área del salinon es idéntica al área de la circunferencia de diámetro $\overline{CF}$ y centro P (figura 18).

SÓLIDOS ARQUIMEDIANOS

FIG. 19



Dodecaedro romo — Cubo truncado — Cuboctaedro — Octaedro truncado

Desgraciadamente, no ha llegado a nosotros el tratado *Sobre los poliedros regulares*, donde parece que Arquímedes describió con detalle los sólidos que hoy llevan su nombre. Sin embargo, sabemos de su existencia gracias al matemático griego Papo de Alejandría, quien en el Libro V de *Sinagoga* dice:

> Aunque pueden ser concebidos muchos sólidos geométricos de muchos tipos, los que tienen formas regulares son los que merecen atención. Estos no solo incluyen las figuras encontradas por el gran Platón, es decir, el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y en quinto lugar el icosaedro, sino también los trece sólidos descubiertos por Arquímedes, formados por polígonos equiláteros y equiangulares pero no similares.

Los sólidos arquimedianos, de los que se muestra algún ejemplo en la figura 19, son un conjunto de trece poliedros convexos que se obtienen en su mayoría truncando los sólidos platónicos: tetraedro truncado, cubo truncado, rombicuboctaedro menor, rombicuboctaedro mayor, octaedro truncado, dodecaedro truncado, icosaedro truncado, cubo romo, cuboctaedro, rombicosidodecaedro menor, rombicosidodecaedro mayor, icosidodecaedro y dodecaedro romo.

CAPÍTULO 4

El ingeniero de la guerra

El mundo de los griegos en torno a la época de Arquímedes también destacaba por el interés de dominar la naturaleza y, para ello, había que crear todo tipo de ingenios y artificios, ya fueran sistemas de apertura de puertas, aparatos para elevar grandes masas o navíos cada vez más sofisticados. En este contexto y con unas matemáticas que veían su esplendor, la receta del nacimiento de la ingeniería científica estaba escrita.

Al igual que ocurre con su faceta de físico, Arquímedes ha sido recordado a lo largo de la historia por sus ingenios e invenciones, más que por sus aportaciones a las matemáticas. Lo curioso es que no dejó absolutamente ninguna línea escrita sobre las máquinas que se le atribuyen, al menos que se sepa. Sin embargo, son múltiples las referencias que tenemos sobre varios dispositivos, así que las presentaremos sean o no de su autoría. Como se comentó en su momento, tal vez el matemático de su época considerase poco el arte de construir máquinas, a pesar de que dicha disciplina ya llevaba cierto recorrido en la historia del mundo griego.

El relato de la defensa de Siracusa esboza un Arquímedes perfectamente capacitado para aplicar todos sus conocimientos a la realidad física y a las necesidades del momento. De este modo, se cuenta que supo adaptar sus descubrimientos matemáticos sobre la palanca a la construcción y mejora de catapultas, así como a complejos sistemas de poleas.

El universo de las invenciones del sabio siracusano no está carente de mitos y leyendas, y algunos autores han citado incluso el uso de un espejo, el rayo de calor, con el que consiguió incendiar la flota romana. Repetiremos algunas de las citas que se han introducido en el primer capítulo, con el fin de dar sustento bibliográfico a los ingenios presentados.

LOS INGENIEROS ALEJANDRINOS



La historia de la ingeniería puede remontarse al nacimiento mismo de la humanidad, si por ingeniería entendemos el uso de herramientas para el bienestar humano. Sin embargo, debemos encuadrar en la época de Arquímedes la génesis de la ingeniería científica, que consiste en aplicar las técnicas geométricas al mundo natural y al de la construcción de artificios. Filón de Bizancio (280-220 a.C.) escribía sus tratados en koiné, que era el griego común del momento, para así llegar a los prácticos. En su obra *Belopoica* realiza un estudio de la catapulta teniendo en cuenta el peso del proyectil y la energía acumulada en el resorte. Un par de siglos después, Herón de Alejandría tomaría algunas ideas de Arquímedes, generalizando, por ejemplo, las leyes de la palanca, e incluso se anticipó experimentalmente a la tercera ley de Newton, la ley de acción y reacción. Lo hizo con una máquina de vapor conocida como «eolípila», que consistía en una cavidad cerrada con dos orificios situados de tal manera que al hacer salir vapor de agua de su interior giraba con rapidez. La máquina de vapor de Herón no era más que una de las muchas máquinas autómatas que tanto se pusieron de moda en la época. Por su parte, Arquímedes contribuyó de manera decisiva a la hora de dar un cuerpo matemático a la física necesaria para la construcción y el entendimiento de algunos de estos ingenios.

Parece ser que el sabio de Siracusa no solo usó su genialidad en el ejercicio de la guerra, sino que también la utilizó en otros ámbitos, como, por ejemplo, en la construcción de un sistema para elevar agua, el tornillo de Arquímedes, el cual se va a tratar a continuación.

EL INGENIO DE ARQUÍMEDES EN LA FILATELIA

Los grandes personajes de la historia han sido inmortalizados en el mundo de la filatelia; el caso de Arquímedes no iba a ser menos. Se adjuntan aquí algunos ejemplos de sellos donde aparece algún aspecto relacionado con el personaje que nos ocupa:

A: Italia. Publicado en mayo de 1983. Aunque la imagen pretendía ser un busto de Arquímedes del Museo Nacional de Nápoles en Italia, en realidad se trata del rey espartano Archidano III. Puede verse el tornillo de Arquímedes.

B: Grecia. Publicado en abril de 1983. Se trata de una ilustración basada en un mosaico renacentista que representa su muerte. Sin embargo, la cabeza es la misma que la que aparece en el sello italiano. Se aprecia una balanza de brazos iguales para mostrar el principio de la hidrostática.

C: San Marino. Publicado en abril de 1982. Curiosamente, el busto es el mismo que el de los sellos griego e italiano, erróneo. Arriba a la derecha puede verse el resultado geométrico que mandó tallar en su lápida.

D: Guinea-Bissau. Publicado en 2008. La imagen, una vez más, es el mismo busto erróneo de los casos anteriores y ya apareció en una postal soviética de 1957. En el fondo puede verse el asteroide 3600 Arquímedes.

E: Nicaragua. Publicado en 1971. Corresponde a la serie «Las diez fórmulas matemáticas que cambiaron la faz de la Tierra». Puede apreciarse la ley de la palanca.

F: España. Publicado en 1963. Corresponde a un cuadro del pintor español José de Ribera (1591-1652), conservado en el Museo del Prado de Madrid.

A



B



C



D



E



F



EL GIGANTE «SIRACUSIA» Y EL TORNILLO DE ARQUÍMEDES

El escritor griego Ateneo de Náucratis (ca. 200) cuenta en *La cena de los eruditos (Deipnosophistai)* que el tirano Hierón II encargó a Arquímedes el diseño de un barco enorme, de unos 55 metros de eslora y con capacidad para 600 personas. Al barco se le puso el nombre de *Siracusia*, en honor a Siracusa, y la construcción y supervisión cayó sobre la figura de Arquias de Corinto.

«Respecto al barco construido por Hierón, el tirano de Siracusa, el cual fue también supervisado por Arquímedes, no tengo derecho a callarlo, ya que un hombre llamado Moschion escribió lo que sigue: [...].»

— Ateneo acerca de la construcción del *Siracusia*. El texto continuaba con una descripción minuciosa de las características del barco.

El *Siracusia* era de un tamaño tal que incluía jardines decorativos, un gimnasio, una biblioteca y un templo dedicado a la diosa Afrodita. Su nombre se cambió al de *Alejandría* cuando fue enviado como regalo a Ptolomeo III de Egipto, junto con un cargamento de grano. El *Siracusia* bien podría llamarse el *Titanic* de la Antigüedad, pues su masa oscilaba entre 1 600 y 1 800 toneladas, siendo el barco de la época más grande del que se tiene noticias, una nave verdaderamente descomunal para ese tiempo. Incluso se comenta en el texto de qué forma se botó el barco, además de la descripción de algunas máquinas creadas por Arquímedes, como por ejemplo, una catapulta. El tamaño del barco da idea de que debía movilizar grandes cantidades de agua a través del casco, para lo cual se dice que el matemático construyó el afamado tornillo de Arquímedes, con el fin de elevar y extraer el agua de la bodega: «Y aunque la bodega era de una profundidad enorme, se podía bombear por un solo hombre, a través de un tornillo, un ingenio que fue invención de Arquímedes».

La invención del tornillo puede que no se deba realmente a Arquímedes, pues es más que famoso el culto que tuvieron los

ARQUÍMEDES Y EL DESARROLLO DE LA INDUSTRIA NAVAL

Hasta que Arquímedes no escribió su tratado *Sobre los cuerpos flotantes* poca gente entendía de verdad lo que significaba flotar. La clave está en la densidad, no en el peso. Su tratado sirvió como punto de partida teórico para la empresa naval. La segunda parte de su tratado incluso estudia el equilibrio de paraboloides en el agua, sólidos geométricos muy parecidos al casco de los barcos. Durante mucho tiempo solo se construían barcos de madera, pero más tarde se empezarían a utilizar materiales más densos que el agua. Los grandes barcos con cascos de acero flotan en el agua a pesar de que la densidad de este metal es muy superior a ella. De hecho, un pequeño trozo de acero soltado sobre el agua se hunde con rapidez. ¿Cómo pueden los barcos flotar si el acero es más denso que el agua? La respuesta está en la estructura del propio barco: se debe conseguir que existan huecos donde el aire haga que la densidad del conjunto sea menor que la del agua. Un barco, por tanto, se hundirá si el agua toma el espacio ocupado por el aire. Así ocurrió, por ejemplo, con el hundimiento legendario del transatlántico *Titanic*, en la noche del 14 al 15 de abril de 1912. El gigante de 270 m de eslora y con capacidad para más de 3500 personas fue incapaz de evitar la colisión lateral con un iceberg, el cual produjo varias grietas en el casco, por donde el agua entró inevitablemente en la nave. En la actualidad, y para evitar tragedias como la del *Titanic*, la industria naval está tendiendo al uso del doble casco —sobre todo en los petroleros—, que posee una barrera de separación doble entre los tanques de carga y el mar, con lo que las naves son menos vulnerables ante una colisión.



Imagen del *Titanic*, el 10 de abril de 1912, cuando comenzaba su viaje inaugural desde Southampton, Inglaterra.

antiguos por el uso del agua como recurso energético y de muchos otros tipos. Tanto es así que algunos filósofos defendieron que el agua era el principio de todas las cosas y tuvieron dioses y divinidades acuáticas. El mar era el día a día como camino y nexo en las relaciones internacionales de los mundos griego y romano. Por otra parte, la manipulación de las aguas en los ríos era fundamental para todos los hombres de la Antigüedad, de manera que, por ejemplo, los artificios en el Nilo pudieron dar lugar a un mejor aprovechamiento de sus recursos. En cualquier caso, el artefacto ha pasado a las páginas de la historia de la ingeniería como obra de Arquímedes. También Vitruvio describe en uno de sus libros una «cóclea para elevar agua», que en esencia se trata del tornillo o rosca de Arquímedes, aunque no llega a nombrar a este. El ingenio consiste en una estructura en hélice semejante a un tornillo arrollada en un tubo que se coloca formando un plano inclinado y que se usa para elevar agua o grano gracias a su giro continuado, por lo que se trata de un tipo de «tornillo sin fin».

EL RAYO DE CALOR

Otra de las historias recurrentes que se cuenta en torno a la figura de Arquímedes es que venció a una de las flotas romanas de Marcelo haciéndola arder, mediante el reflejo de la luz solar a través de unos grandes espejos, cuando se disponían a tomar Siracusa. La historia se conoce como «el rayo de calor de Arquímedes» o «los espejos ustorios de Arquímedes». El término *ustorio* proviene del latín y significa «el que quema». Vamos a ver que no se trata más que de otra de las leyendas que la literatura ha atribuido a nuestro personaje, aunque en ocasiones este tipo de proezas se antoja cierto, pues es sabido que un trozo de cristal sobre hojas secas es una fuente de peligro de incendio. Para refutar la veracidad del ingenio vamos a presentar dos argumentos: la carencia de fuentes históricas fiables y las difíciles condiciones necesarias para que las naves se incendiaran, siguiendo este procedimiento, desde el punto de vista científico.

EL RAYO DE LA MUERTE LLEVADO AL CINE Y LA TELEVISIÓN

El cine ha inmortalizado la figura de Arquímedes en bastantes ocasiones. Entre ellas, el sabio de Siracusa aparece barbudo y casi anciano en la película *Cabiria* (1914), considerada una de las primeras obras de cine histórico de aventuras, también llamadas péplum. El director, Giovanni Pastrone (más conocido por el seudónimo de Piero Fosco), cuenta la historia de una niña romana llamada Cabiria en el contexto de la Segunda Guerra Púnica. El largometraje muestra cómo Arquímedes derrota a la flota romana con la ayuda de los espejos ustorios, lo cual ha servido para alimentar la leyenda del rayo de calor, también conocido como rayo de la muerte.

El rayo de calor en televisión
Más recientemente, en 2006, se ha puesto a prueba el rayo de calor en el programa televisivo de divulgación científica *Cazadores de mitos (Mythbusters),* en el capítulo titulado «El rayo de la muerte de Arquímedes». Para ello, pidieron ayuda a un grupo de estudiantes del MIT (Instituto Tecnológico de Massachusetts) que un año antes habían conseguido hacer brotar llamas en un barco, aunque en unas condiciones muy específicas. Jamie Hyneman y Adam Savage, los cazadores de mitos, repitieron el experimento en San Francisco con un modelo a escala de un trirreme. Las conclusiones fueron: se debería haber hecho exclusivamente durante la mañana (la costa de Siracusa mira al este), en unas condiciones climatológicas perfectas, estando el barco estático y durante un largo período de tiempo. En definitiva, clasificaron la afirmación como desmentida.



Fotograma de la película *Cabiria*, en la que Enrico Gemelli encarna el personaje de Arquímedes.

La primera de las razones que nos encamina a calificar de leyenda el rayo de calor la encontramos en las propias referencias a la historia. No se encuentran alusiones en las fiables narraciones de Siracusa por parte de Plutarco, Tito Livio o Polibio.

Si los espejos ustorios hubieran aparecido en la *Vida de Marcelo* u otro relato histórico, sería más difícil dudar de ellos, pero el verlo omitido de tan importantes fuentes obliga a ser escépticos. Polibio nació doce años después del asedio de Siracusa, por lo que posiblemente conocería a testigos directos de la hazaña y no habría dudado ni un momento en incluirla en sus escritos. No existen, por tanto, referencias tempranas; de hecho, el primero en relatar el suceso fue Galeno de Pérgamo, un médico griego del siglo II, quien en su obra *Los temperamentos* llega a decir: «Arquímedes quemó las naves enemigas con *pureia*». Pero incluso esta primera alusión es confusa, pues según algunos expertos *pureia* podría designar los espejos ardientes o cualquier dispositivo capaz de encender un fuego, por ejemplo, flechas ardientes. Así, hay que ir al siglo VI para encontrar el primer texto realmente explícito, de Antemio de Tralles (ca. 474-¿?) en su tratado *Máquinas extraordinarias*. Antemio ha pasado a la historia por ser el arquitecto, junto a Isidoro de Mileto, de la iglesia de Santa Sofía de Constantinopla, en la actual Estambul. En la obra citada, discute sobre la posibilidad de incendiar ciertas sustancias mediante la reflexión de la luz. Aunque admite que Arquímedes incendió las galeras romanas, también afirma que debería haber usado unos espejos parabólicos enormes.

El resto de alusiones al rayo de calor son aún más tardías e incluyen una hazaña equivalente en la figura de Proclo, ingeniero del emperador bizantino Anastasio I. Así, el historiador griego Juan Zonaras (siglo XII) relata que Proclo logró incendiar en Constantinopla la flota de Vitalino. Se excluyen aquí varias fuentes de la época y de los siglos posteriores en las que se trata el asunto; en cualquier caso, todas son de naturaleza secundaria.

La segunda de las razones que da pie a presentar los espejos ustorios como una leyenda se encuentra, como se ha dicho, en motivos técnicos y científicos. Muchos hombres de ciencia a lo largo de la historia han intentado mostrar que se trata de una fá-

bula, en contraposición a otros que han pretendido darle pábulo. El filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650) negaba la hazaña en su *Dióptrica*, afirmando que el espejo debía ser demasiado grande y la precisión extremadamente afinada.

> «La imaginación no actúa menos en un geómetra que crea que en un poeta que inventa, aunque operan de manera diferente sobre su objeto: el primero lo desnuda y analiza, el segundo lo compone y embellece. [...] De todos los grandes hombres de la Antigüedad, es acaso Arquímedes el que más merece figurar al lado de Homero.»
>
> — JEAN LE ROND D'ALEMBERT.

Por contra, personajes de la talla de Galileo, Bonaventura Cavalieri y Roger Bacon se pronunciaron a favor del acontecimiento, tal vez guiados más por la admiración y respeto a Arquímedes que por las posibilidades técnicas y científicas. Un clásico muy citado es el de Georges Louis Leclerc (1707-1788), conde de Buffon, quien construyó un sistema de espejos con el que llegó a prender pedazos de madera al hacer coincidir todos los rayos. Se trataba de un conjunto de 168 espejos de $16 \times 21{,}5$ cm, que se orientaban a voluntad para hacer coincidir los rayos sobre un objetivo y así maximizar el efecto. El problema era que para hacer funcionar el dispositivo se requería un tiempo mínimo de media hora, al que había que sumarle el intervalo de acción de los rayos para que la madera alcanzase la temperatura suficiente para incendiarse.

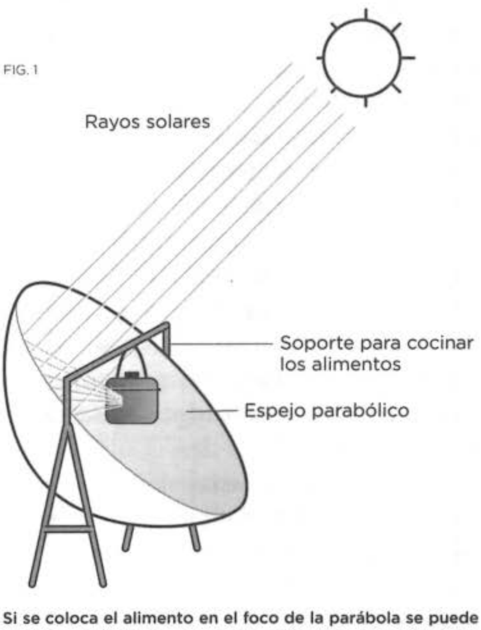
¿Acaso Arquímedes convenció a Marcelo para que dejase sus barcos inmóviles durante tanto tiempo? ¿Tenía el poder de mantener el agua en calma para que los rayos enfocasen siempre en el mismo punto? Este es el verdadero problema, puesto que estudios más recientes demuestran que sí es posible que la madera arda mediante algún tipo de material reflector, pero se necesita tiempo y precisión. Ninguna de las dos variables era controlable por Arquímedes, por muy ingenioso que fuera.

Varias fuentes citan *Catóptrica*, un libro perdido sobre óptica escrito por Arquímedes. A pesar de que conocía a fondo muchas de las propiedades de la parábola, no existe un legado escrito sobre si Arquímedes sabía que los rayos que entran paralelos a una parábola salen reflejados de esta cortándose en el foco. A lo largo de la historia, los científicos que defendieron la anécdota de los espejos ustorios no hablaron en realidad de un espejo parabólico, sino de un conjunto de espejos que, orientados adecuadamente, hacían cortar los rayos reflejados en un punto. Hay que notar que el sistema de muchos espejos es equivalente al de un espejo parabólico,

HORNOS SOLARES

A pesar de que hay numerosas razones de peso para pensar que el rayo de calor de Arquímedes es una leyenda, la idea científica que la sustenta se ha llevado a la práctica con éxito en la actualidad. La energía solar se puede aprovechar de infinidad de maneras; entre ellas, resulta interesante la relativa a la energía termosolar, es decir, el aprovechamiento directo del calor producido por los rayos solares. Ese calor se puede utilizar para cocinar alimentos, calentar agua para uso doméstico o para la producción de energía mecánica con el fin de obtener energía eléctrica. La esencia en los tres casos mencionados es la misma: la concentración de los rayos solares mediante sistemas parabólicos que reflejan debidamente la luz solar (figuras 1 a 3).

FIG. 1



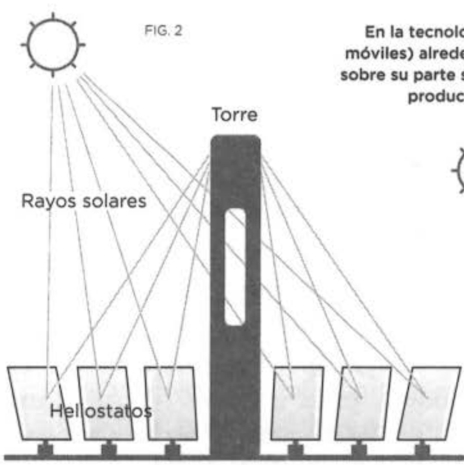
Si se coloca el alimento en el foco de la parábola se puede llegar a cocinar solo con la luz solar. Se trata del mismo sistema que el de los espejos ustorios de Arquímedes.

pues al fin y al cabo se acaban orientando según la superficie de un paraboloide (véase la figura de la página siguiente).

Una de las fuentes más fiables sobre el tratado perdido de Arquímedes es el matemático griego Teón de Alejandría (335-405). En su comentario al *Almagesto* de Ptolomeo dice:

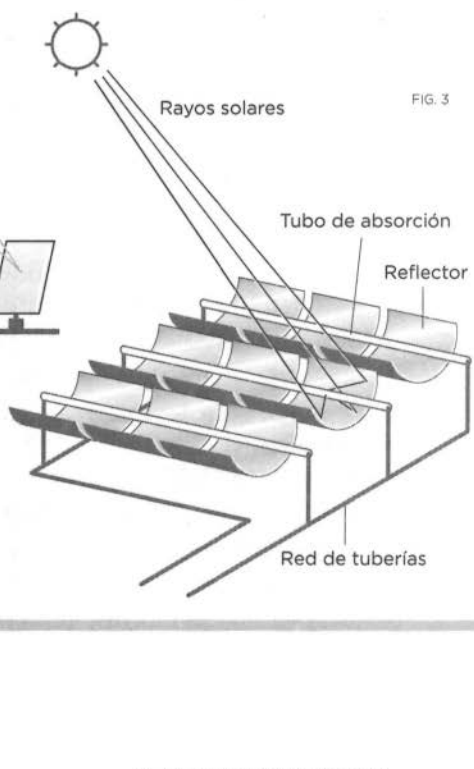
> Y los rayos que desde ella [la vista] recaen sobre el aire, al sufrir la refracción y formar un ángulo mayor que el que tiene su vértice en el ojo, como lo afirma también Arquímedes demostrándolo en los libros sobre catóptrica, que también las cosas sumergidas en el agua parecen más grandes, y que cuanto más abajo van, más grandes parecen.

FIG. 2

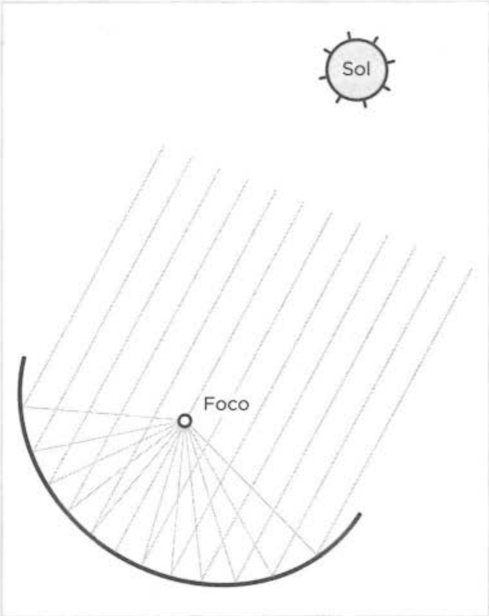


En la tecnología de torre se posicionan los heliostatos (espejos móviles) alrededor de una torre para concentrar los rayos solares sobre su parte superior. Allí calientan un fluido que, al expandirse, produce electricidad tras el movimiento de unas turbinas.

FIG. 3



En la tecnología cilindroparabólica los espejos se posicionan a lo largo de la superficie de un cilindro parabólico, la luz solar se concentra en unos tubos que van siguiendo el eje que hace las veces de foco. Por estos tubos pasa un líquido similar al aceite que tras evaporarse mueve las turbinas que transforman la energía cinética en electricidad.



Habida cuenta de la gran probabilidad de la existencia de *Catóptrica*, se presenta como la posible fuente de la leyenda del rayo de calor.

Según hemos visto Arquímedes realizaba experimentos de todo tipo para poder llegar a sus conclusiones teóricas. Por tanto, *Catóptrica* podría ser un libro de óptica eminentemente matemático cuyos resultados dejarían entrever algún tipo de experimento. Tal vez sus amigos o las personas de su entorno conociesen estos experimentos que con el paso de los años serían el origen de la leyenda.

LA GARRA DE ARQUÍMEDES

Entre todos los artefactos usados por Arquímedes en la defensa de Siracusa, el más destacado tal vez sea la garra de Arquímedes, también conocido como *manus ferrea* («mano de hierro»). Su existencia es muy probable, pues grandes historiadores como Polibio y Tito Livio la explican, aunque no hay acuerdo sobre su verdadera estructura. Lo que sí es seguro es que se trataba de algún tipo de grúa con un enorme gancho metálico que conseguía levantar las naves romanas para su posterior hundimiento.

En líneas generales, el mecanismo consistía en una polea o un polispasto que era accionado por la fuerza animal o de varios hombres (véase la figura de la página siguiente). Se dejaba caer un gancho a modo de ancla que se asía al casco del barco; una vez sujeto, la fuerza motora actuaba levantando el barco. Ese movi-

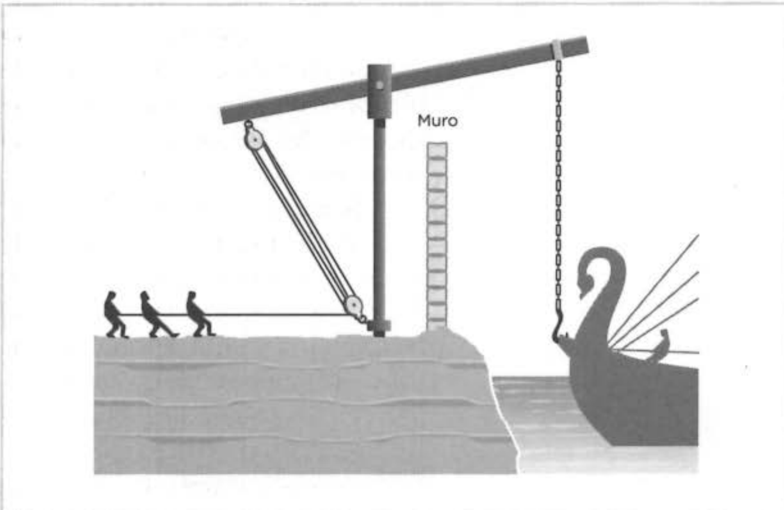


Imagen esquemática del funcionamiento aproximado de la garra de Arquímedes.

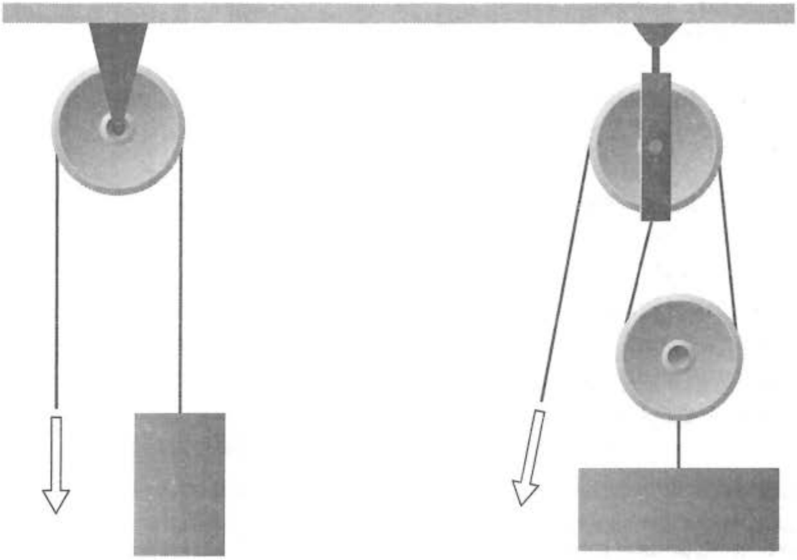
miento debía ser lento, pero irremediable. Cuando se alcanzaba cierta altura, se dejaba caer de golpe, produciendo fracturas que hundían el barco. En palabras de Polibio:

> Al mismo tiempo dejaban caer una mano de hierro atada a una cadena, con la cual aquel que gobernaba la máquina, así que con la parte anterior de ésta había agarrado la proa del navío, bajaba la posterior por dentro de la muralla. Una vez levantada la proa, y puesto el buque perpendicular sobre la popa, quedaba inmóvil la parte anterior de la máquina; pero mediante cierta polea se aflojaba la mano de hierro y la cadena, con lo cual unos navíos caían de costado, otros de espaldas, y la mayor parte, dejaba caer la proa desde lo alto, eran sumergidos y echados a pique.

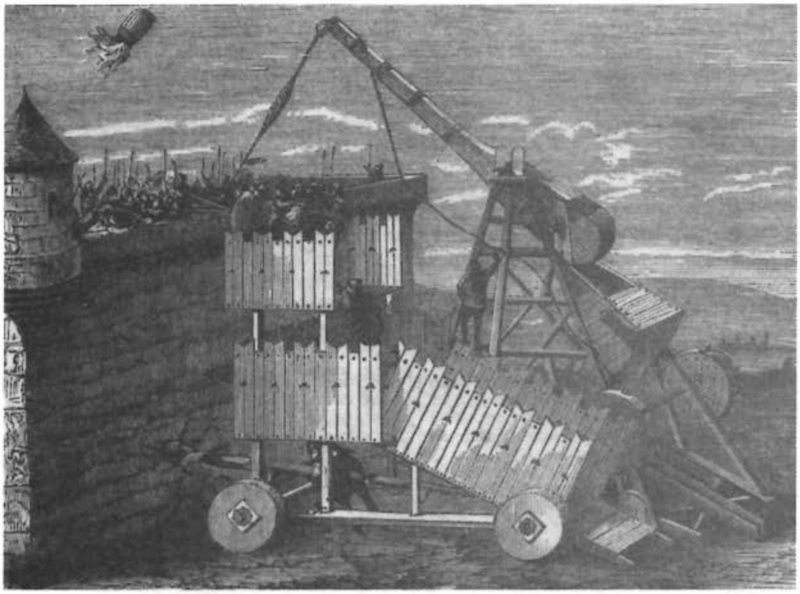
Los científicos e ingenieros antiguos y actuales han mostrado su interés sobre el artefacto. Así, en 2005 se construyó con éxito una garra de Arquímedes para un capítulo de la serie de documentales *Superarmas del mundo antiguo (Superweapons of the Ancient World)*, abriendo la posibilidad de que el ingenio fuera factible.

EL POLISPASTO

Se ha afirmado muy a menudo que fue Arquímedes quien utilizó por primera vez el polispasto, tal vez para su *manus ferrea* o para botar el *Siracusia*. En cualquier caso, es evidente que debería haber utilizado algún sistema que multiplicase la fuerza motora. Y eso es, en esencia, lo que hace un polispasto. Se trata de un conjunto de poleas, con un mínimo de dos, comunicadas convenientemente para conseguir una fuerza mayor de la que se proporciona. Esto no incumple la ley de conservación de la energía, puesto que la clave está en el desplazamiento: mientras que en el punto de aplicación de la fuerza motora se recorre cierta distancia, en el punto de aplicación del cuerpo que se desea movilizar la distancia recorrida es muchísimo menor. Conceptualmente hablando, el objetivo es el mismo que el de la palanca de brazos desiguales, así que si Arquímedes no inventó el polispasto, seguramente sí lo usó, puesto que conocería bien su mecanismo debido a la gran semejanza con una de sus especialidades, la palanca.



Mientras que en una polea simple la fuerza que hay que aplicar es la misma que la fuerza peso del objeto a levantar, con el uso de un polispasto la fuerza a aplicar se minimiza y pueden levantarse grandes pesos con pequeños esfuerzos.



Desde su aparición, la catapulta (izquierda) se ha usado en todas las épocas, aunque este se generalizó en la Edad Media. Abajo, a la izquierda, grabado del tratado *Thesaurus opticus*, de Alhacén (965-1040), que muestra cómo Arquímedes usó los espejos ustorios. Bajo estas líneas, detalle de un fresco en el que se representa la garra de Arquímedes.





En su *Vida de Marcelo*, Plutarco también hace referencia a la mano de hierro:

> En cuanto a las naves, a unas las asían por medio de grandes maderos con punta, que repentinamente aparecieron en el aire saliendo desde la muralla, y, alzándose en alto con unos contrapesos, las hacían luego sumirse en el mar, y a otras, levantándolas rectas por la proa con garfios de hierro semejantes al pico de las grullas, las hacían caer en el agua por la popa, o atrayéndolas y arrastrándolas con máquinas que calaban adentro las estrellaban en las rocas y escollos que abundaban bajo la muralla, con gran ruina de la tripulación.

ARQUÍMEDES: MITOS Y REALIDADES

A lo largo de la presente obra se han repasado las historias reales y las leyendas sobre la vida, los descubrimientos y las invenciones de Arquímedes. Llegados a este punto podemos hacer una recopilación de las afirmaciones más destacadas y conocidas:

1. «Dadme un punto de apoyo y moveré el mundo.» Frase atribuida falsamente a Arquímedes, tomando el sentido estricto de su significado, puesto que tenía conocimientos sobrados para comprobar que no era posible.

2. «¡Eureka!, ¡eureka!» Expresión de alegría que supuestamente pronunció al introducirse en un baño público y descubrir el principio de la hidrostática. Es muy poco probable que la historia sea cierta en sus detalles; posiblemente Vitruvio la adornó literariamente.

3. La corona del rey Hierón II. Seguramente la anécdota de la corona es cierta, aunque el modo de demostración de la estafa sería mediante la combinación del principio de la hidrostática y de la ley de la palanca, no simplemente rebosando agua de un recipiente.

4. El epitafio en la tumba. Es muy probable que sea cierto que Arquímedes pidiera que grabaran en su epitafio una esfera dentro de un cilindro. Cicerón encontró la tumba, ya dañada, pero no ha llegado a nuestros días.

LA CATAPULTA

Una catapulta es un instrumento militar que aprovecha la energía potencial elástica de un sistema comprimido para convertirla en energía cinética cuando se libera. Se tiene conocimiento de que en tiempos de Arquímedes ya se hacía uso de ella y que este pudo mejorarla notablemente. Por ejemplo, Polibio nos cuenta:

> Pero Arquímedes, que tenía prevenidas máquinas para arrojar dardos a todas distancias, mientras los enemigos se hallaban lejos, hiriéndoles con ballestas más elásticas y catapultas de mayor alcance, los reducía al último apuro.

5. «No molestes mis círculos.» La frase en sí puede ser una fantasía, pero su contexto no. Hay acuerdo entre los historiadores de que Arquímedes fue asesinado en su casa mientras trabajaba. Lo que no es seguro es que dijera esta última frase al soldado que acabó con su vida.
6. El tornillo de Arquímedes. Este dispositivo se conocía con seguridad antes de su nacimiento; sin embargo, es muy posible que lo mejorara de algún modo o le sacara más partido.
7. Planificación de la defensa de Siracusa. Según cuentan todas las crónicas serias de los historiadores, este hecho parece ser cierto.
8. La garra de Arquímedes. También es verdad que construyó una máquina que levantaba y destruía de algún modo los barcos, como puede consultarse en las crónicas.
9. El rayo de calor. Es un mito con casi total seguridad, debido a las limitaciones técnicas y a la ausencia de crónicas tempranas.
10. Cálculo del número π. Se dice muchas veces que Arquímedes calculó el número π. ¡Eso es imposible! El número π tiene infinitos decimales y deberíamos estar un tiempo infinito enumerando cada decimal. Sí es cierto que calculó una aproximación que hoy se sigue usando: 3,14.

OBSERVADOR DEL CIELO

El único libro en el que Arquímedes muestra una evidencia de su gusto por la astronomía es *El Arenario*. Sin embargo, existen otras fuentes que hacen pensar que dedicó parte de su vida a observar el cielo e incluso construyó máquinas relacionadas con la astronomía. De hecho, Papo de Alejandría cuenta que escribió un tratado llamado *Sobre la construcción de esferas*, documento que desgraciadamente se ha perdido.

«Considero que hubo en aquel siciliano [Arquímedes] más inteligencia que la que parece que haya podido producir la naturaleza humana.»

— CICERÓN.

Por su parte, Cicerón relata que en el saqueo de los soldados de Marcelo se encontraron dos esferas pertenecientes al célebre siracusano. Una de ellas era sólida y tenía grabadas estrellas en su superficie, unos globos celestes que Cicerón atribuye a Tales y Eudoxo. La segunda de las esferas sorprende más y Cicerón sí adjudica su invención a Arquímedes. Se trata de un planetario, es decir, un sistema mecánico que representa el movimiento del Sol, la Luna, los planetas y las estrellas, con centro en la Tierra. Ambas esferas fueron tomadas como botín de guerra y llevadas por Marcelo al templo de Virtus, en Roma. El general, político y astrónomo romano Cayo Sulpicio Galo estudió el mecanismo a conciencia, como cuenta Cicerón en *Sobre la República*:

> Pero tan pronto como Galo ha empezado a explicar, con su sublime ciencia, la composición de esta máquina, sentí que el geómetra siciliano debió poseer un genio superior a cualquier cosa que usualmente concibamos perteneciente a nuestra naturaleza.

En el año 1900 se descubrieron los restos del naufragio de un barco griego del siglo I a.C. Allí se encontraba un dispositivo que ha sido identificado como una calculadora astronómica, lo cual

viene a ser un planetario muy sofisticado. El hallazgo fue bautizado con el nombre de «mecanismo de Anticitera», puesto que se descubrió en la isla griega homónima. Se trata de un planetario muy avanzado, por lo que no debía ser un modelo único. Tal vez el planetario de Arquímedes fuera un dispositivo precursor del de Anticitera.

HOMENAJEANDO A ARQUÍMEDES

No solo Arquímedes ha prestado su nombre a la ingeniería, sino que también los ingenios de nuestros tiempos han usado su nombre como homenaje. Así, son incontables las veces que se ha tomado prestado el «¡Eureka!» para nombrar centros de investigación, asociaciones, etc. Del mismo modo se ha hecho con el propio nombre de Arquímedes, siendo uno de los reconocimientos más importantes el epónimo que aparece tres veces en la Luna. El Cráter de Arquímedes tiene un diámetro de unos 80 km y una profundidad de 2,1 km, y se encuentra en las coordenadas 29,7° N, 4,0° W, en la zona oriental del *Mare Imbrium*. Al sur del cráter se localizan los Montes de Arquímedes y en el borde sureste se extiende una planicie, *Palus Putredinis*, donde se halla un sistema de grietas llamado Fisura de Arquímedes. La sonda soviética Luna 2 es la obra humana que más cerca ha estado del cráter y fue el primer artefacto en llegar con éxito a la superficie lunar, estrellándose sobre *Palus Putredinis*, el 13 de septiembre de 1959. Por otra parte, los seres humanos que más se han aproximado al Cráter de Arquímedes son David Scott y James Irwin, el comandante y el piloto del módulo lunar Falcon, respectivamente, de la misión Apolo 15. El lugar de alunizaje del Falcon fue la base de los *Montes Apenninus*, a unos 200 km del sureste del centro del cráter.

Anexo

En este anexo se recogen algunos textos de los tratados de Arquímedes, según la traducción de Paloma Ortiz García, en la Biblioteca Clásica Gredos, edición de 2005. La numeración de las citas se refiere a la edición de Heiberg-Stamatis: volumen en números romanos y página y líneas en arábigos, siempre en este orden.

«SOBRE LA ESFERA Y EL CILINDRO»

Libro I

«2. Llamo siempre cóncava por el mismo lado a una línea tal que si en ella tomamos dos puntos cualesquiera, las rectas entre esos puntos o bien caen enteras hacia el mismo lado de la línea o bien una parte hacia el mismo lado y otra sobre la propia línea, pero ninguna hacia el otro lado.» (I, 6, 6-12)

«Proposición 33. La superficie de toda esfera es el cuádruple del círculo máximo de los que hay en ella.» (I, 121, 15-16)

«Proposición 34. La esfera entera es el cuádruple del cono que tiene la base igual al círculo máximo de los de la esfera y por altura el radio de la esfera.» (I, 125, 15-17)

«Corolario [a proposición 34]. Una vez demostrado lo anterior, es evidente que todo cilindro que tenga por base el círculo máximo de los de la esfera y la altura igual al diámetro de la esfera es una vez y media la esfera, y su superficie, incluidas las bases, es una vez y media la superficie de la esfera.» (I, 131, 4-9)

«Proposición 42. La superficie de todo casquete de esfera menor que un hemisferio es igual al círculo cuyo radio es igual a la recta trazada desde el vértice del casquete hasta la circunferencia del círculo que es la base del casquete de esfera.» (I, 157, 1-5)

«Proposición 44. Todo sector de esfera es igual a un cono que tenga la base igual a la superficie del casquete de esfera correspondiente al sector y la altura igual al radio de la esfera.» (I, 160, 13-16)

Libro II

Arquímedes a Dositeo

«¡Salud! Hace un tiempo me pediste que redactara las demostraciones de los problemas cuyos enunciados yo mismo envié a Conón. Ocurre que la mayor parte de ellas se redacta por medio de los teoremas cuyas demostraciones te mandé antes: [...].» (II, 168, 1-8)

«Proposición 3. El tercer problema era este: cortar mediante un plano la esfera dada de manera que las superficies de los casquetes guarden entre sí una razón igual a la razón dada.» (II, 184, 1-4)

«SOBRE LA MEDIDA DEL CÍRCULO»

«Proposición 1. Todo círculo es igual a un triángulo rectángulo cuyo radio es igual a uno de los lados que forman el ángulo recto y el perímetro es igual a la base.» (I, 232, 1-4)

«Proposición 2. El círculo guarda con el cuadrado levantado sobre su diámetro la razón de 11 a 14.» (I, 235, 18-20)

«Proposición 3. El perímetro de todo círculo es el triple del diámetro y además excede de él en menos de un séptimo del diámetro, pero es más de diez setentaiunavos.» (I, 237, 8-11)

«SOBRE LOS CONOIDES Y LOS ESFEROIDES»

«Proposición 4. Toda área comprendida por una elipse guarda con el círculo de diámetro igual al diámetro mayor de la elipse la misma razón que su diámetro menor con el mayor o con el diámetro del círculo.» (I, 276, 3-7)

«Proposición 6. Las áreas comprendidas por las elipses guardan entre sí la misma razón que la que guardan entre sí los rectángulos comprendidos por los diámetros de las elipses.» (I, 285, 7-10)

«Proposición 19. Dado un segmento de cualquiera de los dos tipos de conoide cortado por un plano perpendicular al eje, o un segmento no mayor que la mitad de un elipsoide de una u otra clase cortado de manera semejante, es posible inscribir una figura sólida y circunscribir otra compuesta de cilindros de la misma altura de modo que la figura circunscrita exceda a la inscrita en una magnitud menor que cualquier magnitud sólida propuesta.» (I, 336, 1-14)

«Proposición 21. [...] Todo segmento de paraboloide cortado por un plano perpendicular al eje es una vez y media el cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje.» (I, 345, 18-23)

«Proposición 27. En todo elipsoide cortado por un plano que pase por el centro, perpendicular al eje, la mitad del elipsoide es el doble del cono que tiene la misma base que el segmento y el mismo eje.» (I, 393, 18-22)

«SOBRE LAS ESPIRALES»

«De los teoremas que envié a Conón, respecto a los cuales me encargas constantemente que te escriba las demostraciones, la mayoría las tienes escritas en lo que te llevó Heráclides y algunas otras te las escribo y envío en este libro.» (II, 2, 2-6)

«Proposición 1. Si un punto moviéndose se desplaza uniformemente por una línea y en ella se toman dos líneas, las líneas tomadas guardarán entre sí la misma razón que los tiempos en los que el punto las recorrió.» (II, 12, 13-17)

«1. Si se traza una línea recta en un plano y, permaneciendo fijo uno de sus extremos y haciéndola girar un número cualquiera de veces, vuelve de nuevo a la posición de la que partió y, al mismo tiempo que se hace girar la línea, se desplaza por la recta un punto a velocidad uniforme partiendo del extremo fijo, el punto describirá una espiral en el plano.» (II, 45, 16-22)

«Proposición 24. El área comprendida por la espiral trazada en su primer giro y por la recta primera tomada en la recta principio del giro es la tercera parte del círculo primero.» (II, 87, 7-10)

«SOBRE EL EQUILIBRIO DE LAS FIGURAS PLANAS»

Libro I

«1. Postulamos que los pesos iguales a distancias iguales están en equilibrio, y que los pesos iguales a distancias desiguales no están en equilibrio, sino que el de mayor longitud se inclina hacia el peso.

2. Y que, si estando en equilibrio unos pesos a ciertas distancias, se incrementa uno de los pesos, no mantienen el equilibrio, sino que se inclinan hacia el peso al que se le añadió algo.

3. E igualmente, que si de uno de los pesos se quita algo, no mantienen el equilibrio, sino que se inclina hacia el peso del que no se quitó nada.» (II, 124, 3-12)

«Proposición 1. Los pesos en equilibrio a distancias iguales son iguales.» (II, 127, 5-6)

«Proposición 2. Los pesos desiguales a distancias iguales no están en equilibrio, sino que se inclinarán hacia el mayor.» (II, 127, 12-14)

«Proposición 6. Las magnitudes conmensurables están en equilibrio a distancias que guardan la razón inversa de la de los pesos.» (II, 131, 13-15)

«Proposición 7. Y también de modo semejante, si las magnitudes son inconmensurables, estarán en equilibrio a distancias que guarden la razón inversa de las magnitudes.» (II, 137, 17-20)

«Proposición 10. El centro de gravedad de todo paralelogramo es el punto en que se cortan las diagonales.» (II, 142, 22-24)

«Proposición 14. En todo triángulo el centro de gravedad es el punto en el que coinciden las rectas trazadas desde los ángulos hasta el centro de los lados.» (II, 158, 8-11)

Libro II

«Proposición 8. El centro de gravedad de todo segmento comprendido por una recta y una parábola corta al diámetro del segmento de modo que la parte de este que está hacia el vértice del segmento es una vez y media la parte del mismo que está hacia la base.» (II, 187, 29-30, 188, 1-3)

«EL ARENARIO»

Arquímedes a Gelón

«Creen algunos, rey Gelón, que es infinito en cantidad el número de granos de arena —me refiero no solo a la que hay en Siracusa

y el resto de Sicilia, sino también a la de toda la Tierra habitada y no habitada—. Y hay algunos que suponen que no es que sea infinito, sino que no ha recibido nombre ninguna cifra tan elevada que exceda esta cantidad.» (II, 216, 3-9)

«Pero yo intentaré hacerte ver —mediante demostraciones geométricas que podrás comprender— que alguno de los números a los que he dado nombre y que he dado a conocer en los libros que dediqué a Zeuxipo superan no solo el número de granos de arena igual en magnitud a la Tierra colmada, como dijimos, sino también el de un volumen igual al mundo.» (II, 217, 16-21, 218, 1)

«Te consta que la mayor parte de los astrónomos llaman "mundo" a la esfera cuyo centro es el centro de la Tierra y cuyo radio es igual a la recta que hay entre el centro del Sol y el centro de la Tierra, pues eso ya lo has aprendido de las demostraciones escritas por los astrónomos.» (II, 218, 3-7)

«[...] [Aristarco de Samos] supone que los astros fijos y el Sol permanecen inmóviles, y que la Tierra se desplaza según una circunferencia de círculo en torno al Sol, el cual está situado en el centro de su curso, y que la esfera de los astros fijos, situada en torno al mismo centro que el Sol, es de un tamaño tal que el círculo según el cual supone que se desplaza la Tierra guarda con la distancia de los astros fijos una razón como la que guarda el centro de la esfera con su superficie. Es más que evidente que esto es imposible: puesto que el centro de la esfera no tiene ningún tamaño, tampoco cabe aceptar que guarde ninguna razón con la superficie de la esfera.» (II, 219, 10-23)

«En primer lugar, que el perímetro de la Tierra es de 300 miríadas de estadios y no mayor.» (II, 220, 8-9)

«Después de esto, que el diámetro de la Tierra es mayor que el diámetro de la Luna y que el diámetro del Sol es mayor que el diámetro de la Tierra, asumiendo en esto igualmente lo mismo que la mayoría de los astrónomos anteriores.» (II, 220, 15-18)

«Después de esto, que el diámetro del Sol es treinta veces mayor que el diámetro de la Luna y no más, aunque entre los astrónomos anteriores Eudoxo hizo ver que era nueve veces mayor; Fidias, mi padre, que dos veces, y Aristarco intentó demostrar que el diámetro del Sol era más de dieciocho veces mayor que el de la Luna, pero menor que veinte veces más.» (II, 216, 3-9)

«Pero supongo que también es útil que hable sobre la denominación de los números —entre otras cosas, para que no se pierdan los que no han tenido acceso al libro que dediqué a Zeuxipo por no haberse dicho de antemano en este libro nada sobre esa cuestión—. Ocurre, en efecto, que los nombres de los números que nos han sido transmitidos llegan hasta las miríadas y por encima de las miríadas. Llámense pues primeros a los números indicados hasta la miríada de miríada.

La miríada de miríadas de los números primeros llámese unidad de los números segundos, y cuéntense las unidades de números segundos y, a partir de las unidades, las decenas, centenas y millares y miríadas de miríadas.

De nuevo, a la miríada de miríadas de los números segundos llámesela unidad de números terceros, y cuéntense las unidades de los números terceros y, a partir de las unidades, las decenas, centenas, millares y miríadas hasta las miríadas de miríadas.

[...] y avanzando así sucesivamente tengan los números nombres que lleguen hasta las miríadas de miríadas de los números del ordinal correspondiente a la miríada de miríadas.

Conocidos también hasta ese punto los números, cabe avanzar aún más: llámese a los números indicados hasta ahora "del primer período", y llámese al último número del primer período unidad de los números primeros del segundo período. De modo semejante, también al último número de estos llámesele unidad de los números terceros del segundo período y así sucesivamente, según avanzan los números tengan los nombres del segundo período hasta las miríadas de miríadas de números del ordinal correspondiente a la miríada de miríada. De nuevo, al último número del segundo período llámesele unidad del tercer período, y así sucesivamente avanzando hasta las miríadas de

miríadas de los números del ordinal de la miríada de miríadas del período de la posición de la miríada de miríadas.» (II, 237, 17-29, 239, 1-29)

«Por tanto, ha quedado demostrado que la cantidad de granos de arena que ocupa una magnitud igual a lo que la mayor parte de los astrónomos llaman mundo es inferior a 1 000 unidades de números séptimos.» (II, 255, 29-31)

«Es evidente por tanto que la cantidad de granos de arena que ocupa una magnitud igual a la esfera de los astros fijos que Aristarco supone como hipótesis es inferior a 1 000 miríadas de números octavos.» (II, 255, 29-31)

«SOBRE LA CUADRATURA DE LA PARÁBOLA»

Arquímedes a Dositeo

«Al oír que había muerto Conón, cuya amistad nunca me faltó, y que tú habías conocido a Conón y que estabas familiarizado con la geometría, me entristecí por el difunto en su calidad de amigo y de hombre que ha llegado a ser admirable en matemáticas, y me propuse enviarte por escrito, igual que solía escribir a Conón, teoremas matemáticos que antes no habían sido estudiados, pero que ahora han sido estudiados por mí, habiéndolo descubierto primero mediante el método mecánico y habiéndolos demostrado después por el método geométrico.» (II, 262, 4-13)

«Proposición 21. Si en un segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo [parábola] se inscribe un triángulo que tenga la misma base que el segmento y la misma altura, y en los segmentos restantes se inscriben otros triángulos que tengan la misma base que los segmentos y la misma altura, el triángulo inscrito en el segmento entero será el óctuplo de cada uno de los triángulos inscritos en los segmentos que quedan en torno.» (II, 306, 1-9)

«Proposición 23. Si se disponen sucesivamente magnitudes en la razón de cuatro a uno, todas las magnitudes más la tercera parte de la menor sumadas en una sola serán cuatro tercios de la mayor.» (II, 310, 5-9)

«Proposición 24. Todo segmento comprendido por una recta y una sección de cono rectángulo [parábola] es cuatro tercios del triángulo que tiene la misma base que él e igual altura.» (II, 312, 1-4)

«SOBRE LOS CUERPOS FLOTANTES»

Libro I

«Supóngase que el líquido tiene una naturaleza tal que de las partes suyas que yacen por igual y son continuas, la menos presionada es empujada por la más presionada, y que cada una de sus partes es presionada verticalmente por el líquido que está por encima de ella a menos que el líquido esté encerrado en un recipiente y sea presionada por alguna otra cosa.» (II, 318, 2-8)

«Proposición 2. La superficie de todo líquido en estado de inmovilidad tendrá la figura de una esfera que tendrá por centro el mismo que la Tierra.» (II, 319, 7-9)

«Proposición 3. De las magnitudes sólidas, las que tienen el mismo peso que el líquido, depositadas en el líquido, se sumergirán de modo que no se sobresalga en absoluto de la superficie del líquido y ya no serán llevadas más abajo.» (II, 321, 31-33, 322, 1-2)

«Proposición 4. De las magnitudes sólidas, la que es más liviana que el líquido, depositada en el líquido, no se sumergirá entera, sino que una parte de ella quedará por fuera de la superficie del líquido.» (II, 325, 25-26, 326, 1-3)

«Proposición 5. De las magnitudes sólidas, la que es más liviana que el líquido, depositada en el líquido, se sumergirá en la medida

en que un volumen del líquido igual al volumen de la parte sumergida tenga un peso igual al de la magnitud entera.» (II, 328, 18-22)

«Proposición 6. Los sólidos más livianos que el líquido, forzados dentro del líquido, son desplazados hacia arriba con una fuerza tan grande como el peso en que es más pesado que la magnitud el líquido que tiene igual volumen que la magnitud.» (II, 331, 10-14)

«Proposición 7. Las magnitudes más pesadas que el líquido, depositadas en el líquido, se desplazarán hacia abajo hasta llegar al fondo en el líquido y serán más livianas en un peso igual al del líquido de volumen igual al volumen de la magnitud sólida.» (II, 328, 18-22)

Libro II

«Proposición 1. Si una magnitud que es más liviana que el agua es depositada en el líquido guardará en peso con el líquido la misma razón que guarda la parte sumergida de la magnitud con la magnitud entera.» (II, 347, 2-7)

«STOMACHION»

«Como el llamado *Stomachion* contiene variadas posibilidades de estudio de la transposición de las figuras que lo componen, consideré necesario exponerlo estudiando en primer lugar la magnitud de la figura entera y las partes en que se divide y a qué figura es semejante cada una de ellas [...].» (II, 416, 2-6)

«EL MÉTODO SOBRE LOS TEOREMAS MECÁNICOS»

Arquímedes a Eratóstenes

«Y al ver, como digo, que eres estudioso y que destacas considerablemente en filosofía y que aprecias la investigación matemática

cuando es el caso, probé a escribirte y a definir en este mismo libro la peculiaridad de cierto método mediante el cual, cuando te lo haya proporcionado, te será posible disponer de recursos para poder investigar algunos asuntos matemáticos por medio de la mecánica. Estoy persuadido de que eso es no menos útil también para la demostración de estos mismos teoremas, pues algunas de las cosas que primero se me mostraron por medio de la mecánica luego las demostré por medio de la geometría, porque la investigación por este método carece de demostración; y es más fácil avanzar en la demostración tras haber alcanzado por anticipado cierto conocimiento de las cuestiones gracias a este método que hacer la investigación sin conocer nada.» (II, 429, 19 ss)

«[...] Al redactar el método he pretendido sacarlo a la luz a la vez porque previamente había hablado en favor de él —no fuera que les pareciera a algunos que había estado hablando palabras vanas— y al mismo tiempo porque estaba convencido de que arrojaría no pequeña utilidad para la matemática. Pues sostengo que algunos, bien de los presentes, bien de los venideros, mediante el método que doy a conocer descubrirán incluso otros teoremas que aún no se me han ocurrido.» (II, 430, 12-18)

«EL LIBRO DE LOS LEMAS»

«Proposición 4. Sea *ABC* un semicírculo y estén sobre el diámetro *AC* dos semicírculos, de los cuales sea uno *AD* y otro *DC*, y sea *DB* una perpendicular; en cualquier caso, la figura resultante, a la que Arquímedes llama arbelos —es la superficie comprendida por el arco de un semicírculo mayor y las dos circunferencias de los semicírculos menores— es igual a un círculo cuyo diámetro es la perpendicular *DB*.» (II, 513)

«Proposición 5. Si hay un semicírculo *AB* y en cualquier parte en su diámetro está marcado un punto *C* y sobre el diámetro se construyen dos semicírculos *AC*, *CB*; y desde *C* se traza *CD* perpendicular a *AB*, y, a uno y otro lado, se describen dos círculos

tangentes a ella y tangentes a los semicírculos, en cualquier caso aquellos dos círculos son iguales.» (II, 514)

«Proposición 7. Si se traza un círculo en torno a un cuadrado y otro dentro de él, en cualquier caso el circunscrito será el doble del inscrito.» (II, 517)

«Proposición 14. Si hay un semicírculo *AB* y de su diámetro *AB* se cortan líneas iguales *AC*, *BD* y sobre esas líneas se construyen los semicírculos *AC*, *CD*, *DB* y el centro de los dos semicírculos *AB*, *CD* es el punto *E*, y *EF* es perpendicular a *AB* y se prolonga hasta *G*, el círculo de diámetro *FG* es igual a la superficie contenida por el semicírculo mayor y los dos semicírculos que están en su interior y el semicírculo de en medio que está fuera de él. Y esta es la figura a la que Arquímedes llama salino.» (II, 523)

«EL PROBLEMA DE LOS BUEYES»

«Tras dedicarle tus desvelos, si participas de la sabiduría, haz la cuenta, extranjero, de la cantidad de los bueyes del Sol que pacían en las llanuras de la siciliana isla Trinacia repartidos en cuatro hatos diferentes en pelaje: uno blanco como la leche, reluciente otro de color negro; otro rubio y otro, a manchas.» (II, 529, 5-10)

«Y tú, extranjero, si llegaras a decir exactamente cuántas eran las reses del Sol —por su lado el número de los fuertes toros, por su lado las hembras cuantas había en cada grupo según su color—, no serías llamado ignorante ni inexperto en números.» (II, 531, 22-24)

Lecturas recomendadas

ARQUÍMEDES-EUTOCIO, *Tratados I. Comentarios*, Madrid, Gredos, 2005.

—: *Tratados II. Comentarios*, Madrid, Gredos, 2005.

BELL, E.T., *Los grandes matemáticos*, Buenos Aires, Losada, 2010.

BOYER C., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 2007.

GAMOW, G., *Biografía de la física*, Madrid, Alianza Editorial, 2007.

LOZANO, M., *De Arquímedes a Einstein*, Barcelona, Debolsillo, 2007.

PLUTARCO, *Vidas paralelas*, «*Vida de Marcelo*» (en *Biógrafos griegos*), Aguilar, Madrid, 1970.

STEWART, I., *Historia de las matemáticas*, Madrid, Crítica, 2008.

STRATHERN, P., *Arquímedes y la palanca*, Madrid, Siglo XXI, 1999.

TORIJA, R., *Arquímedes. Alrededor del círculo*, Madrid, Nivola, 1999.

VEGA, L., *Arquímedes: El método*, Madrid, Alianza Editorial, 1986.

Índice